Lineare Algebra und Analytische Geometrie (WS 07/08)
11. Übungsblatt
(auszuarbeiten bis 14. Jänner 2008)

11.1 (Äquivalenzrelationen)

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $M := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, also auf der Menge der Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit

$$\forall f, g \in M : f \sim g \iff f(0) = g(0) \wedge f(1) = g(1). \tag{1}$$

- Bestimmen Sie die Äquivalenzklasse von $f(x) = x + 4$.
- Bestimmen Sie die Faktormenge $M_{/\sim}$ in der Gestalt $\{\{\ \dots \mid \dots\ \} \mid \dots\ \}$.
- Bestimmen Sie ein Repräsentantensystem.

11.2 (Lineares Gleichungssystem)

Lösen Sie folgende Aufgabe *ohne* elektronische Hilfsmittel.

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -7 \end{pmatrix} \tag{2}$$

und

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

- Geben Sie die reduzierte Zeilenstaffelform von A an.
- Geben Sie den Rang der Matrix A an.
- Geben Sie den Lösungsraum von $Ax = b$ an.

11.3 (Lineare Hülle)

Zeigen oder widerlegen Sie für K ein Körper, V ein Vektorraum über K und $S \subseteq V$:

- Jeder Teilvektorraum $U \subseteq V$ mit $S \subseteq U$ enthält $\operatorname{span}(S)$.
- S ist genau dann ein Teilvektorraum von V, wenn $S = \operatorname{span}(S)$.

11.4 (Lineare Hülle)

Wir betrachten $\mathbb{R}^4$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$. Zeigen oder widerlegen Sie:

$$\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}\right) \tag{4}$$

11.5 (Funktionenräume, Äquivalenzrelationen und Basen)

Seien M und $\sim$ wie in Beispiel 11.1.

Wir betrachten $M_{/\sim}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$, wobei Addition und Skalarmultiplikation wie folgt (mit $f, g \in M$, $\lambda \in \mathbb{R}$) definiert sind als

$$K(f) + K(g) = K(f+g) \tag{5}$$

und

$$\lambda K(f) = K(\lambda f) \tag{6}$$

- Finden Sie eine Basis B von $M_{/\sim}$.
- Bestimmen Sie die Dimension von $M_{/\sim}$.

11.6 (Funktionenräume, Äquivalenzrelationen und Basen)

Wir betrachten wieder $M_{/\sim}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$, wie in Beispiel 11.5.

- Finden Sie einen 0-dimensionalen Teilvektorraum von $M_{/\sim}$ und geben Sie eine Basis dafür an.
- Finden Sie einen 1-dimensionalen Teilvektorraum von $M_{/\sim}$ und geben Sie eine Basis dafür an.
- Finden Sie einen 2-dimensionalen Teilvektorraum von $M_{/\sim}$ und geben Sie eine Basis dafür an.

11.7 (Basen)

Wir betrachten $\mathbb{R}^4$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Seien $u_1, u_2, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$, $U = \operatorname{span}(u_1, u_2)$ und $V = \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$, wobei

$$u_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, u_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \\ -13 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

- Berechnen Sie eine Basis für U und die Dimension von U.
- Berechnen Sie eine Basis für V und die Dimension von V.
- Berechnen Sie eine Basis für $U \cap V$ und die Dimension von $U \cap V$.

11.8 (Basen)

Seien U und V wie in Beispiel 11.7.

- Berechnen Sie eine Basis für $U + V$ und die Dimension von $U + V$.
- Ist die Summe von U und V direkt?
- Berechnen Sie eine Basis für $W := (U+V)_{/U \cap V}$ und die Dimension von W.
- Finden Sie einen Teilvektorraum V' von $\mathbb{R}^4$ mit Dimension 1, sodaß die Summe von U und V' direkt ist.