## 1

## auszuarbeiten bis 30. Juni 2008

Aufgabe 12. 1. Gegeben seien die Polynome

$$f_1(x,y) = x^2y + xy + 1$$
  
 $f_2(x,y) = y^2 + x + y$ .

Berechnen Sie eine Gröbnerbasis des Ideals  $\langle f_1, f_2 \rangle$ .

Aufgabe 12. 2. Betrachten Sie das System algebraischer Gleichungen aus dem Skriptum, Beispiel 13.31.

$$a1(x, y, z) = a2(x, y, z) = a3(x, y, z) = 0$$
, wobei

$$\begin{array}{rcl}
a1 & = & 2xy + yz - 3z^{2} \\
a2 & = & x^{2} - xy + y^{2} - 1 \\
a3 & = & yz + x^{2} - 2z^{2}.
\end{array}$$

Bestimmen Sie alle Lösungen, indem Sie eine Gröbnerbasis berechnen.

Aufgabe 12. 3. Berechnen Sie die Lösungen des Gleichungssystems

$$xz - xy^{2} - 4x^{2} - \frac{1}{4} = 0$$

$$y^{2}z + 2x + \frac{1}{2} = 0$$

$$x^{2}z + y^{2} + \frac{1}{2}x = 0$$

- 1. mittels Resultanten;
- 2. mit Hilfe einer Gröbnerbasis.

Aufgabe 12. 4. Berechnen Sie die singulären Punkte der Kurve

$$x^4 + 2x^2y^2 - 2x^3 + y^4 - 6xy^2 + x^2$$

unter Zuhilfenahme einer Gröbnerbasis.