auszuarbeiten bis 21. Jänner

Aufgabe 12. 1. Es seien $U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$, $U2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+z=0\}$, $U3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}$ Unterräume von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie Basen von $U1, U1 \cap U2$ und $U1 \cap U2 \cap U3$.

Aufgabe 12. 2. Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Es sei $\sim$ die Relation auf V

$$v \sim w \iff v - w \in U \qquad (v, w \in V).$$

Zeigen Sie:

1. $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.
2. $K(v) = v + U = \{v + u \mid u \in U\}\ \forall v \in V$, wobei $K(v)$ die Äquivalenzklasse des Vektors $v \in V$ bezeichne.
3. $K(v1) = K(w1) \wedge K(v2) = K(w2) \Rightarrow K(v1 + v2) = K(w1 + w2)$.
4. $K(v) = K(w) \wedge \lambda \in K \Rightarrow K(\lambda v) = K(\lambda w)$.
5. Durch $K(v) + K(w) = K(v + w)$ und $\lambda \cdot K(v) = K(\lambda v)$ wird $V/\sim$ zu einem Vektorraum.[1]

Aufgabe 12. 3. Gegeben sind die Vektoren des $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1, -1, 2)^T,\ v_2 = (2, 1, 3)^T,\ v_3 = (3, -1, 5)^T$$

und die Funktion $h\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto 2x + 3y - z$.

1. Zeigen Sie, daß h linear ist.
2. Berechnen Sie die Basisdarstellung von h in der zu $B = (v_1, v_2, v_3)$ dualen Basis.

Aufgabe 12. 4. Es sei D die Drehung der Ebene $\mathbb{R}^2$ um den Koordinatenursprung $(0, 0)$ um $30°$.

1. Zeigen Sie, daß $D\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung ist.
2. Bestimmen Sie die Matrix $\mathcal{A}(D, B, B)$ von D bezüglich der kanonischen Basis $B = (e_1, e_2)$, wo $e_1 = (1, 0)^T$, $e_2 = (0, 1)^T$.

Aufgabe 12. 5. Berechnen Sie die Matrix der Spiegelung an der Ebene $x + y + z = 0$ im $\mathbb{R}^3$ bezüglich der kanonischen Basis $B = (e_1, e_2, e_3)$.

Aufgabe 12. 6. Sei $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(K)$ der Vektorraum der 2×2-Matrizen über dem Körper K.

1. Zeigen Sie, daß $B = (E_{1,1}, E_{2,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$, wobei
$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
eine Basis von V ist.
2. Sei $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in V$. Berechnen Sie die Matrix $\mathcal{A}(h_A, B, B)$ der linearen Abbildung $h_A\colon V \longrightarrow V,\ h_A(X) = A \cdot X$ bezüglich B.

[1] Dieser Vektorraum wird bezeichnet mit V/U.