auszuarbeiten bis 28. Jänner

Aufgabe 13. 1. Gegeben seien Polynome $p_n \in \mathbb{R}[x]$ mit $\deg(p_n) = n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

1. Zeigen Sie, daß $\{p_0, p_1, p_2, \dots\}$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}[x]$ ist.
2. Schließen Sie daraus, daß jedes Polynom $f \in \mathbb{R}[x] \setminus 0$ eine eindeutige Darstellung
$$f = \sum_{k=0}^{\deg f} c_k \prod_{l=1}^{k} (x - l + 1)$$
mit $c_k \in \mathbb{R}$ zuläßt.

Aufgabe 13. 2. Sei $h\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an der Ebene $\varepsilon\colon x+y+z = 0$.

1. Ergänzen Sie eine Basis von ε durch einen Normalvektor von ε zu einer Basis B von $\mathbb{R}^3$ und bestimmen Sie die Matrix $\mathcal{A}(h, B, B)$.
2. Berechnen Sie die Matrix $\mathcal{A}(h, St, St)$, wo $St = (e_1, e_2, e_3)$ die kanonische Basis (Standardbasis) des $\mathbb{R}^3$ sei, mittels der Basistransformation $B \longrightarrow St$.
3. Kontrollieren Sie das Ergebnis in Punkt 2. durch Vergleich mit der Lösung der Aufgabe 12. 5.

Aufgabe 13. 3. Es seien U, V die folgenden Teilräume des $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} U &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = 0 \wedge x - 2y + 2t = 0\} \\ V &= \operatorname{Span}\{(2, 1, 1, -3), (3, 4, 4, -2), (1, -2, -2, -4)\} \end{aligned}$$

Berechnen Sie eine Basis von

1. $U \cap V$;
2. $U + V$.

Aufgabe 13. 4. Gegeben seien Vektoren $v_1 = (-1, 1, 1)$, $v_2 = (1, -1, 1)$, $v_3 = (1, 1, -1)$ in $\mathbb{R}^3$, und die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Zeigen Sie, daß $B = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.
2. Es sei h die lineare Abildung $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\mathcal{A}(h, B, B) = M$. Berechnen Sie die Matrix von h in der Standardbasis $\mathrm{St} = (e_1, e_2, e_3)$, also $\mathcal{A}(h, \mathrm{St}, \mathrm{St})$.

Aufgabe 13. 5. Bezüglich der Standardbasen B von $\mathbb{R}^3$ und C von $\mathbb{R}^2$ sei der linearen Abbildung $h\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Matrix

$$\mathcal{A}(h, B, C) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

zugeordnet. Welche Matrix entspricht h hinsichtlich der Basen $B' = ((2, 1, -1), (1, 0, 3), (-1, 2, 1))$ von $\mathbb{R}^3$ und $C' = ((1, 1), (1, -1))$ von $\mathbb{R}^2$?

Aufgabe 13. 6. Es seien U, V, W endlichdimensionale Vektorräume über K und $f\colon U \longrightarrow V$, $g\colon V \longrightarrow W$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Rang}(g \circ f) \leq \min\{\mathrm{Rang}(f), \mathrm{Rang}(g)\}.$$

Aufgabe 13. 7. Sei K ein Körper und $a_1, \ldots, a_n \in K$.

1. Zeigen Sie, daß durch

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$$

   ein lineares Funktional $f\colon K^n \longrightarrow K$ definiert ist.

2. Beweisen Sie, daß jedes lineare Funktional $f \in \mathrm{Hom}(K^n, K)$ von der in 1. angegebenen Form ist.