Lineare Algebra
und
Analytische Geometrie
Teil I

Vorlesungsskriptum
Johannes Kepler Universität Linz
Wintersemester 2008/09

Prof. Franz Winkler
Institut für Symbolisches Rechnen
(RISC)

"The trouble with the world is that the stupid are cocksure and the intelligent are full of doubt." Bertrand Russell

Vorwort

Kurz gesagt geht es in der Linearen Algebra darum, Systeme linearer Gleichungen zu lösen. Kaum ein Zweig der Mathematik oder auch der Wissenschaft und Technik kommt ohne die grundlegenden Techniken der Linearen Algebra aus. Mit der Lösung linearer Gleichungssysteme sind zahlreiche Fragen verbunden, etwa:

- Kann man entscheiden, ob ein Gleichungssystem lösbar ist?
- Wieviele "unabhängige" Lösungen hat ein Gleichungssystem?
- Kann man die Menge der Lösungen irgendwie auf endliche Art beschreiben?
- Gibt es eine Lösungsformel?
- Gibt es eine konzise Notation für das Rechnen mit linearen Gleichungen, etwa Matrizen?
- Haben lineare Gleichungen bzw. ihre Lösungen eine geometrische Interpretation?

In der Vorlesung "Lineare Algebra und Analytische Geometrie" sollen diese und ähnliche Fragestellungen behandelt werden.

Als Grundlage für dieses Skriptums dienen die hervorragenden Lehrbücher

> T.S. Blyth, E.F. Robertson,
> "Basic Linear Algebra" und "Further Linear Algebra",
> Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2002.

Literatur

[1] T.S. Blyth, E.F. Robertson, *Basic Linear Algebra*, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (2002)

[2] T.S. Blyth, E.F. Robertson, *Further Linear Algebra*, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (2002)

[3] M. Drmota, *Lineare Algebra I, II*, Vorlesungsssskriptum 2003/2004, Technische Univ. Wien (2004)

[4] K. Jänich, *Lineare Algebra*, 10.Aufl., Springer-Verlag (2004)

[5] S. Lang, *Linear Algebra*, 3. Auflage, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York (1987)

[6] I.-H. Lin, *Geometric Linear Algebra*, World Scientific, Singapore (2005)

[7] G. Pilz, *Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, II, III*, Vorlesungsskriptum 2005/2006, Institut für Algebra, JKU (2006)

[8] D.J.S. Robinson, *A Course in Linear Algebra with Applications*, World Scientific, Singapore (1991)

[9] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley (1998)

[10] B.L. van der Waerden, *Algebra I*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1971)

[11] R.S. Wolf, *A Tour Through Mathematical Logic*, The Mathematical Association of America (2005)

Inhalt

So kann es einem Mathematiker ergehen! [1]

When Henri Poincaré took the entrance exam to the Collège de France, he was asked the following question: "Determine the next term of the sequence $2, 3, 7, 9, \ldots$*"*

Like any good mathematician, Poincaré found the question frustrating and annoying. He said, "There is no unique answer. There is not sufficient information." Poincaré answered several other exam questions in a like manner.

The examiners were not amused, and they failed Henri Poincaré on his first attempt to gain admission to the illustrious Collège.

Für

$$p(x) = \frac{1}{24}(-3x^4 - 2x^3 + 63x^2 - 34x + 48), \quad q(x) = \frac{1}{12}(-x^4 - 4x^3 + 37x^2 - 20x + 24)$$

gilt

$$\begin{array}{lllll} p(0) = 2, & p(1) = 3, & p(2) = 7, & p(3) = 9, & p(4) = 1 \\ q(0) = 2, & q(1) = 3, & q(2) = 7, & q(3) = 9, & q(4) = 2 \end{array}$$

One of the great modern exponents of finite mathematics, combinatorics, group theory, classical geometry, and many other parts of "hands-on" mathematics is John Horton Conway of Princeton. One day a student of John's presented him with this sequence:

1 3

1 1 1 3

3 1 1 3

1 3 2 1 1 3

1 1 1 3 1 2 2 1 1 3

3 1 1 3 1 1 2 2 2 1 1 3

1 3 2 1 1 3 2 1 3 2 2 1 1 3

1 1 1 3 1 2 2 1 1 3 1 2 1 1 1 3 2 2 2 1 1 3

and so forth. The challenge was to find the rule that generates the sequence. What is the next element?

[1] S.G.Krantz, "Mathematical Apocrypha Redux", The Mathematical Association of America (2005), Seite 145