Satz 5.24: *Sei S eine linear unabhängige Teilmenge des Vektorraums V, und sei G eine Spannmenge von V, mit $S \subseteq G$. Dann gibt es (mindestens) eine Basis B von V mit $S \subseteq B \subseteq G$.*

Beweis: Sei

$$\mathcal{B} := \{T \mid S \subseteq T \subseteq G \text{ und } T \text{ ist linear unabhängig}\} .$$

Die Menge $\mathcal{B}$ ist durch die Teilmengenbeziehung "$\subseteq$" geordnet und erfüllt die Voraussetzung des Lemmas von Zorn (vgl. Axiomatisierung der Mengentheorie in Kap.1.3):
"Falls jede Kette in einer geordneten Menge $(A, \leq)$ eine obere Schranke (in A) besitzt, so besitzt A ein maximales Element."
Ist nämlich

$$S \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \cdots$$

eine Kette in $\mathcal{B}$, so ist

$$\bigcup_{1 \leq i} S_i$$

eine obere Schranke für die Elemente dieser Kette in $\mathcal{B}$.

Somit besitzt $\mathcal{B}$ ein maximales Element B.

Für B gilt natürlich $\mathrm{span}(B) = V$; wäre $x \in V \setminus \mathrm{span}(B)$, dann wäre auch $B \cup \{x\}$ linear unabhängig, also B nicht maximal in $\mathcal{B}$.

Dieses B ist also eine Basis von V. $\square$

Korollar: *Jeder Vektorraum besitzt (mindestens) eine Basis.*