6 Lineare Abbildungen

Bei der Untersuchung einer algebraischen Struktur spielen im wesentlichen immer zwei Konzepte eine wichtige Rolle: Unterstrukturen, also Teilmengen mit derselben Struktur, und Morphismen, also strukturerhaltende Abbildungen. Mit Teilvektorräumen haben wir uns schon im vorigen Kapitel befasst. Nun wenden wir uns den Morphismen auf Vektorräumen zu.

Im Kapitel 3 haben wir Koeffizientenmatrizen $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ betrachtet und lineare Gleichungssysteme

$$A\,x \;=\; b$$

gelöst. Eine solche Matrix A induziert aber auch eine Abbildung

$$\begin{array}{rccc} f_A: & K_n & \longrightarrow & K_m \\ & x & \longmapsto & Ax \end{array}$$

Diese Abbildung besitzt folgende Eigenschaften:

$$\begin{array}{rcll} f_A(0) & = & 0\,, & \\ f_A(x+y) & = & f_A(x)+f_A(y) & \forall x,y\in K_n, \\ f_A(\lambda x) & = & \lambda f_A(x) & \forall x\in K_n, \forall \lambda\in K. \end{array}$$

Sie ist also verträglich mit der Vektorraumstruktur. Im folgenden werden wir eine solche vertägliche Abbildung eine lineare Abbildung nennen.

Definition 6.1: *Seien V und W Vektorräume über demselben Körper K. Eine* **lineare Abbildung** *bzw.* **lineare Transformation** *bzw.* **Vektorraumhomomorphismus** *ist eine Abbildung $f: V \longrightarrow W$, sodass*

(i) $f(x+y) = f(x)+f(y)$ *für alle $x,y\in V$, und*

(ii) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ *für alle $x \in V$ und $\lambda \in K$.*

Eine Abbildung $g: V\longrightarrow W$ heisst **affin***, wenn es Abbildungen f und c von V nach W gibt, sodass f linear ist, c konstant ist, und $g = f + c$.*

Beispiel 6.2: Die folgenden Abbildungen sind lineare Abbildungen, also Vektorraumhomomorphismen.

(i) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f((x,y)) = (x+y, x-y, y)$.
Für alle $(x,y),(u,v) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{array}{rcl} f((x,y)+(u,v)) & = & f((x+u, y+v)) \\ & = & (x+u+y+v,\ x+u-y-v,\ y+v) \\ & = & (x+y, x-y, y)\ +\ (u+v, u-v, v) \\ & = & f((x,y))\ +\ f((u,v))\ , \end{array}$$

und für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ und alle $\lambda\in\mathbb{R}$ gilt

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda(x,y)) & = & f((\lambda x, \lambda y)) \\ & = & (\lambda x+\lambda y,\ \lambda x-\lambda y,\ \lambda y) \\ & = & \lambda(x+y, x-y, y) \\ & = & \lambda f((x,y))\ . \end{array}$$

(ii) Die Projektion auf die i-te Komponente $\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathrm{pr}_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$.

(iii) Die Ableitungs- oder Differentiationsabbildung auf dem Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$:
$D : \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ mit $D(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$.

(iv) Die Integralabbildung $I : \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, welche definiert ist als

$$I(p(x)) \;=\; \int_0^1 p(x)dx \;.$$

Satz 6.3: *Seien V, W, U Vektorräume über K. Sei f eine lineare Abbildung von V nach W, und sei g eine lineare Abbildung von W nach U. Dann gilt:*

(i) $f(0_V) = 0_W$, und

(ii) $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in V$.

(iii) $g \circ f$ ist eine lineare Abbildung von V nach U.

(iv) Falls X ein Teilraum von V ist, so ist $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ ein Teilraum von W.

(v) Falls Y ein Teilraum von W ist, so ist $f^{-1}(Y) = \{v \in V \mid f(v) \in Y\}$ ein Teilraum von V.

Definition 6.4: *Sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Der Teilraum $f(V)$ von W heisst das* **Bild** *(auch* **Image***) von f, geschrieben* $\mathrm{im}(f)$. *Der Teilraum $f^{-1}(\{0_W\})$ von V heisst der* **Kern** *bzw.* **Nullraum** *von f, geschrieben* $\mathrm{kern}(f)$.

Beispiel 6.5:

(i) Wir betrachten im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ (also über $\mathbb{R}$) die Projektion auf die i-te Komponente $\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Das Bild von pr_i ist ganz $\mathbb{R}$, und der Kern von pr_i ist die Menge der n-Tupel, deren i-te Komponente 0 ist.

(ii) Wir betrachten die Differentiationsabbildung D im reellen Vektorraum $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$. Das Bild von D ist $\mathrm{Pol}_{n-1}(\mathbb{R})$, und der Kern von D ist $\mathrm{Pol}_0(\mathbb{R})$.

(iii) Sei A eine $n \times n$ Matrix über dem Körper K. Sei f_A die lineare Abbildung

$$\begin{array}{cccc} f_A : & \mathrm{Mat}_{n\times 1}(K) & \longrightarrow & \mathrm{Mat}_{n\times 1}(K) \\ & x & \mapsto & Ax \end{array} .$$

Das Bild $\mathrm{im}(f_A)$ besteht aus allen Spaltenvektoren y, für welche es einen Spaltenvektor x gibt mit $Ax = y$; also aus allen y, welche sich schreiben lassen als Linearkombinationen der Spalten $a_1, \ldots, a_n$ der Matrix A; also $\mathrm{im}(f_A) = \mathrm{span}(\{a_1, \ldots, a_n\})$. Der Kern von f_A besteht aus allen Spaltenvektoren x, für welche gilt $Ax = 0$; der Kern ist also der Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$.

(iv) Im Vektorraum $\mathrm{Fun}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$ betrachten wir den von Sinus und Cosinus aufgespannten Teilraum, also

$$V = \mathrm{span}(\{\sin, \cos\}) \ .$$

Die Elemente von V sind von der Form

$$f(x) = a\sin(x) + b\cos(x) \ , \quad \text{für } a, b \in \mathbb{R} \ .$$

Sei $I : V \to \mathbb{R}$ die Abbildung

$$I(f) := \int_0^\pi f(x)dx \ .$$

I ist eine lineare Abbildung. Eine Funktion $f(x) = a\sin(x) + b\cos(x)$ ist im Kern von I g.d.w.

$$0 \ = \ \int_0^\pi (a\sin(x) + b\cos(x))dx \ = \ -a\cos(x) + b\sin(x)\Big|_0^\pi \ = \ 2a \ ,$$

also g.d.w. $a = 0$. Wir sehen also, dass $\mathrm{kern}(I) = \mathrm{span}(\{\cos\})$.

(v) Wir betrachten die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(a, b, c, d) = (a + b, b - c, a + d) \ .$$

Aus $(a + b, b - c, a + d) = a(1, 0, 1) + b(1, 1, 0) + c(0, -1, 0) + d(0, 0, 1)$ sehen wir

$$\mathrm{im}(f) = \mathrm{span}(\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1)\}) \ .$$

Wir wollen eine Basis für $\mathrm{im}(f)$ bestimmen. Dazu transformieren wir die Matrix A, deren Zeilen $\mathrm{im}(f)$ aufspannen, in die zugehörige Hermite-Matrix $H(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad H(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Die Zeilen von $H(A)$ spannen denselben Raum auf wie die Zeilen von A. Die ersten drei Zeilen von $H(A)$ sind offensichtlich linear unabhängig, also

$$\begin{aligned} \mathrm{im}(f) &= \mathrm{span}(\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0)\}) \\ &= \mathrm{span}(\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}) \quad = \quad \mathbb{R}^3 \ . \end{aligned}$$

□

Satz 6.6: *Für eine lineare Abbildung $f : V \to W$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) f ist injektiv;

(ii) $\mathrm{kern}(f) = \{0\}$.

Satz 6.7: *Seien V und W endlich dimensionale Vektorräume über demselben Körper K, und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt*

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{im}(f)) + \dim(\mathrm{kern}(f)) \ .$$

Beispiel 6.8: Wir betrachten die Differentiationsabbildung D auf $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ (vgl. Beispiel 6.2(iii) und Beispiel 6.6(ii)). $\dim(\mathrm{im}(D)) = n$, $\dim(\mathrm{kern}(D)) = 1$, und somit haben wir

$$\dim(\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})) = n + 1 = \dim(\mathrm{im}(D)) + \dim(\mathrm{kern}(D)) \ . \qquad \square$$

Satz 6.9: *Seien V und W jeweils endlichdimensionale Vektorräume derselben Dimension n über dem Körper K. Sei weiters $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) f ist injektiv;

(ii) f ist surjektiv;

(iii) f ist bijektiv;

(iv) f bildet Basen auf Basen ab; ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V, dann ist $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ eine Basis von W.

Definition 6.10: *Seien V und W Vektorräume über dem Körper K, und $h : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung (Homomorphismus) von V nach W.*
Ist h surjektiv, so heisst h ein **Epimorphismus**.
Ist h injektiv, so heisst h ein **Monomorphismus** *bzw. eine* **Einbettung**. *V heisst dann in W* **einbettbar**. *Wir schreiben dafür $V \hookrightarrow W$.*
Ist h bijektiv, so heisst h ein **Isomorphismus**. *In diesem Fall ist dann natürlich auch h^{-1} ein Isomorphismus von W nach V, und V und W heissen dann* **isomorph**, *geschrieben als $V \cong W$.*
Ist $V = W$, so heisst h ein **Endomorphismus**. *Ein bijektiver Endomorphismus heisst ein* **Automorphismus**.

Satz 6.11: (Homomorphiesatz) *Sei f eine lineare Abbildung von V nach W. Dann gilt*

$$V/_{\mathrm{kern}(f)} \ \cong \ \mathrm{im}(f) \ .$$

Der Faktorraum nach dem Kern von f ist also isomorph zum Bild von f.

Satz 6.12: *Auf jeder Menge von Vektorräumen über dem Körper K ist $\cong$ eine Äquivalenzrelation.*

Satz 6.13:

(i) *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über K, und sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V. Dann ist*

$$h_B : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & K^n \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i & \mapsto & (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \end{array}$$

ein Isomorphismus.

(ii) *Sind V und W zwei Vektorräume über K mit $\dim(V) = \dim(W)$, so sind V und W isomorph.*

Beispiel 6.14: Die folgenden Vektorräume über K sind isomorph:

$$\mathrm{Mat}_{m\times n}(K) \cong K^{mn} \cong \mathrm{Mat}_{n\times m}(K) \cong \mathrm{Pol}_{mn-1}(K) \ . \qquad \square$$

Satz 6.15: *Seien V und W Vektorräume über K, sei $B = \{b_i \mid i \in I\}$ eine Basis von V (wobei $b_i \neq b_j$ für $i \neq j$), und seien w_i, $i \in I$, Elemente von W (nicht notwendigerweise verschieden). Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ mit $f(b_i) = w_i$ für alle $i \in I$.*

Wegen des obigen Satzes ist also eine lineare Abbildung vollständig und eindeutig bestimmt durch ihr Verhalten (Aktion) auf einer Basis. Zwei lineare Abbildungen sind gleich g.d.w. sie auf einer Basis übereinstimmen.

Beispiel 6.16: Wir betrachten die linearen Abbildungen aus Beispiel 6.2.

(i) $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ist vollständig und eindeutig bestimmt durch sein Verhalten auf der Basis $\{(1,0),(0,1)\}$: $h(1,0) = (1,1,0), h(0,1) = (1,-1,1)$.

(ii) Die Projektion $\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ist vollständig und eindeutig bestimmt durch $\mathrm{pr}_i(e_j) = \delta_{ij}$ (Kronecker-Symbol, vgl. Def.2.1.16).

(iii) Die Ableitungsabbildung $D : \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ ist bestimmt durch die Aktion auf der Basis $\{1, x, \ldots, x^n\}$: $D(x^i) = ix^{i-1}$.

(iv) Die Integralabbildung $I : \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $I(p(x)) = \int_0^1 p(x)dx$ ist bestimmt durch ihre Aktion auf der Basis $\{x^i \mid 0 \leq i \leq n\}$:

$$I(x^i) \ = \ \int_0^1 x^i dx \ = \ \frac{1}{i+1} x^{i+1}\Big|_0^1 \ = \ \frac{1}{i+1} \ . \qquad \square$$

Definition 6.17: *Eine Folge endlich dimensionaler Vektorräume zusammen mit linearen Abbildungen der Form*

$$V_1 \longrightarrow^{f_1} V_2 \longrightarrow^{f_2} V_3 \longrightarrow^{f_3} \cdots \longrightarrow^{f_n} V_{n+1}$$

für $n \geq 1$ heisst eine **exakte Sequenz** *wenn folgendes gilt:*

(i) f_1 *ist injektiv,*

(ii) f_n *ist surjektiv,*

(iii) $\mathrm{im}(f_i) = \mathrm{kern}(f_{i+1})$ *für alle i zwischen 1 und $n-1$.* $\square$

Beispiel 6.18: Wir betrachten das Schema

$$V_1 = \mathbb{R}^2 \longrightarrow^{f_1} V_2 = \mathbb{R}^3 \longrightarrow^{f_2} V_3 = \mathbb{R} \ ,$$

wobei $f_1(a,b) = (a+b, 2b, a-b)$ und $f_2(u,v,w) = -u+v+w$.
f_1 ist injektiv und f_2 ist surjektiv.
$\mathrm{im}(f_1)$ wird aufgespannt von $\{(1,0,1),(1,2,-1)\}$, also auch von $\{(1,0,1),(0,1,-1)\}$, also

$$\mathrm{im}(f_1) = \{(u,v,u-v) \mid u,v \in \mathbb{R}\} .$$

Der Kern von f_2 ist wie folgt charakterisiert:

$$(u,v,w) \in \mathrm{kern}(f_2) \iff -u+v+w=0 \iff w = u-v \iff (u,v,w) \in \mathrm{im}(f_1) .$$

Dieses Schema ist also eine exakte Sequenz. Für die Dimensionen der Vektorräume gilt

$$\dim(V_1) - \dim(V_2) + \dim(V_3) = 0 . \qquad \square$$

Satz 6.19: *Für eine exakte Sequenz* $V_1 \longrightarrow^{f_1} V_2 \longrightarrow^{f_2} V_3 \longrightarrow^{f_3} \cdots \longrightarrow^{f_n} V_{n+1}$ *gilt:*

$$\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \dim(V_i) \;=\; 0 .$$

Der Vektorraum der Homomorphismen und der duale Raum

Satz 6.20: *Seien V,W Vektorräume über K, seien $g,h : V \longrightarrow W$ Homomorphismen (lineare Abbildungen), und sei $\lambda \in K$. Dann sind auch die folgenden Abbildungen linear:*

$$\begin{array}{rccl} g+h: & V & \longrightarrow & W \\ & v & \mapsto & g(v)+h(v) \end{array} , \qquad \begin{array}{rccl} \lambda h: & V & \longrightarrow & W \\ & v & \mapsto & \lambda h(v) \end{array} .$$

Die Menge der Homomorphismen von V nach W bildet also einen Vektorraum über K. Dabei spielt die Nullabbildung $0 : V \longrightarrow W, v \mapsto 0$ die Rolle des Nullvektors.

Definition 6.21: *Seien V,W Vektorräume über K. Dann ist der* **Vektorraum der Homomorphismen** *(ebenfalls über K) definiert als*

$$\mathrm{Hom}_K(V,W) := \{h : V \longrightarrow W \mid h \text{ ein Homomorphismus}\}$$

mit den in Satz 6.20 eingeführten Verknüpfungen.

Beispiel 6.22: Ein Element $h \in \mathrm{Hom}_K(K^2,K)$ ist eindeutig bestimmt durch die Aktion von h auf der Basis $\{(1,0),(0,1)\}$. Ist also etwa K der endliche Körper $\mathbb{Z}_p$, p eine Primzahl, so gibt es genau p Möglichkeiten für $h(1,0)$ sowie für $h(0,1)$. Der Vektorraum der Homomorphismen $\mathrm{Hom}_K(K^2,K)$ hat also genau p^2 Elemente. $\square$

Satz 6.23: *Seien V,W endlichdimensionale Vektorräume über K, mit $\dim(V) = m$ und $\dim(W) = n$. Dann ist $\dim(\mathrm{Hom}_K(V,W)) = mn$.*

Beispiel 6.22 (Fortsetzung): Wir schreiben die Elemente von $K = \mathbb{Z}_p$ als $0,1,\ldots,p-1$ (eigentlich sind es natürlich die Restklassen mit diesen Repräsentanten). $B = \{b_1,b_2\}$ mit $b_1 = (1,0)$ und $b_2 = (0,1)$ ist Basis für $\mathbb{Z}_p^2$, und natürlich ist $C = \{c_1\}$ mit $c_1 = 1$ Basis von $\mathbb{Z}_p$. Für einen Homomorphismus $h : \mathbb{Z}_p^2 \to \mathbb{Z}_p$ sei $h(1,0) = m \cdot 1 = m$ und $h(0,1) = n \cdot 1 = n$. Dann gilt für alle $(a,b) \in \mathbb{Z}_p^2$

$$h(a,b) = h(a,0) + h(0,b) = am + bn = mh_{11}(a,b) + nh_{21}(a,b).$$

Jeder Homomorphismus lässt sich also (auch eindeutig) schreiben als

$$h = mh_{11} + nh_{21} \ ,$$

und daher gilt $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_p^2, \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p^2$. □

Definition 6.24: *Sei V ein Vektorraum über K. Dann heisst*

$$V^* \ := \ \mathrm{Hom}_K(V, K)$$

der **Dualraum** *von V. Die Elemente von V^* heissen* **lineare Funktionale**.

Beispiel 6.25: (vgl. Beispiel 6.2) Die Projektionen $\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und die Integralabbildung $I : \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sind lineare Funktionale. □

Satz 6.26: *Jeder Vektorraum V ist in seinen Dualraum V^* einbettbar; es gibt also einen Monomorphismus $h : V \to V^*$. Somit gilt $\dim(V) \leq \dim(V^*)$. Ist V endlichdimensional, so gilt sogar $V \cong V^*$.*

Definition 6.27: *Ist V endlichdimensional mit $\dim(V) = n$ und ist $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V, so heisst $B^* := \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ (wie in Satz 6.26) die zu B* **duale Basis** *(von V^*).*

Beispiel 6.28: Wir betrachten den Vektorraum K^n über K und die kanonische Basis $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Dann ist $B^* = \{\mathrm{pr}_1, \ldots, \mathrm{pr}_n\}$ die zu B duale Basis (von V^*). □

Lineare Abbildungen und Matrizen

Um Matrizen in Zusammenhang mit linearen Abbildungen bringen zu können, werden wir Elemente eines Vektorraums darstellen als Zeilen- oder Spaltenvektoren (bzgl. einer geordneten Basis). Dabei werden wir mit K^n immer die Menge der Zeilenvektoren der Länge n und Komponenten aus dem Körper K bezeichnen (wie auch bisher), und mit K_n die Menge der Spaltenvektoren der Länge n mit Komponenten aus K.

Definition 6.29: *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über K mit $\dim(V) = n$. Ein n-tupel $(b_1, \ldots, b_n)$ von Elementen von V heisst eine* **geordnete Basis** *von V g.d.w. $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V ist.*
Ist $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine geordnete Basis von V und ist $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \in V$, so heisst der Spaltenvektor $(v)_B := (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T \in K_n$ die **Basisdarstellung** *von v bzgl. B.*

Offensichtlich gilt also für die Basisdarstellung $(v)_B$ eines Vektors $v \in V$:

$$v = B \cdot (v)_B \ .$$

Seien nun V und W Vektorräume über K mit $\dim(V) = m$ und $\dim(W) = n$. Sei weiters $B = (b_1, \ldots, b_m)$ eine geordnete Basis von V und sei $C = (c_1, \ldots, c_n)$ eine geordnete Basis von W. Eine lineare Abbildung $h \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ ist eindeutig bestimmt durch ihre Aktion auf B, also etwa durch die Darstellung von $h(B)$ bzgl. der Basis C:

$$\begin{array}{rcccccccl} h(b_1) & = & a_{11}c_1 & + & a_{12}c_2 & + & \cdots & + & a_{1n}c_n \\ h(b_2) & = & a_{21}c_1 & + & a_{22}c_2 & + & \cdots & + & a_{2n}c_n \\ & \vdots & & & & & & & \\ h(b_m) & = & a_{m1}c_1 & + & a_{m2}c_2 & + & \cdots & + & a_{mn}c_n \ . \end{array} \qquad (*)$$

Somit entspricht jeder linearen Abbildung h eindeutig eine Matrix bestehend aus den Linearkoeffizienten a_{ij}. Für diese Koeffizienten gilt

$$h(b_i)_C = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix} .$$

Definition 6.30: *Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über K, $B \in V^m$ eine geordnete Basis von V und $C \in W^n$ eine geordnete Basis von W, und sei $h \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$. Die Transponierte der Matrix in $(*)$, also die $n \times m$-Matrix*

$$\mathcal{A}(h,B,C) := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} ,$$

*heisst die (***Darstellungs-***)* **Matrix** *von h bzgl. der geordneten Basen B und C.*

Beispiel 6.31:

(i) Sei $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert als

$$h(x,y,z) = (2x - 3y + z, 3x - 2y) .$$

Die Aktion von h auf der geordneten kanonischen Basis

$$B = (\,(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\,)$$

von $\mathbb{R}^3$ sieht, dargestellt bzgl. der geordneten Basis

$$C = (\,(1,0),\ (0,1)$$

von $\mathbb{R}^2$ wie folgt aus:

$$\begin{array}{lclcl} h(1,0,0) & = & (2,3) & = & 2(1,0) + 3(0,1) \\ h(0,1,0) & = & (-3,-2) & = & -3(1,0) - 2(0,1) \\ h(0,0,1) & = & (1,0) & = & 1(1,0) + 0(0,1) \end{array}$$

Die Darstellungmatrix ist also

$$\mathcal{A}(h,B,C) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Offensichtlich gilt für einen beliebigen Vektor $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(h(v))_C = \mathcal{A}(h,B,C) \cdot (v)_B .$$

(ii) Sei $D : \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ die in Beispiel 6.2.(iii) definierte Differentiationsabbildung. In $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ betrachten wir die geordnete Basis

$$B = (1, x, x^2, \ldots, x^n) .$$

Die Darstellungmatrix ist

$$\mathcal{A}(D,B,B) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} .$$

Für ein beliebiges Polynom $a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \cdots + a_n x^n$ gilt

$$(D(a))_B \;=\; (a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1})_B \;=\; \mathcal{A}(D,B,B) \cdot (a)_B \;. \qquad \square$$

Satz 6.32: *Mit den Bezeichnungen wie in Def.6.30 gilt für alle $v \in V$:*

$$(h(v))_C \;=\; \mathcal{A}(h,B,C) \cdot (v)_B \;.$$

Korollar: *Für die kanonischen geordneten Basen B bzw. C in K_m bzw. K_n, eine lineare Abbildung $h \in \mathrm{Hom}_K(K_m, K_n)$, und einen beliebigen Vektor $v \in K_m$ gilt:*

$$h(v) \;=\; \mathcal{A}(h,B,C) \cdot v \;. \qquad (*)$$

Eine analoge Beziehung gilt für Zeilenvektoren, nur muss man dann in $(*)$ jeweils die transponierten Vektoren (also Spaltenvektoren) einsetzen.

Satz 6.33: *Seien U, V, W endlichdimensionale Vektorräume über K, $B \in U^m$ eine geordnete Basis von U, $C \in V^n$ eine geordnete Basis von V und $D \in W^p$ eine geordnete Basis von W, und seien $f, g \in \mathrm{Hom}_K(U,V)$, $h \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$, und weiters $\lambda \in K$. Dann gilt:*

(i) $\mathcal{A}(f+g,B,C) = \mathcal{A}(f,B,C) + \mathcal{A}(g,B,C)$;

(ii) $\mathcal{A}(\lambda f,B,C) = \lambda\mathcal{A}(f,B,C)$;

(iii) $\mathcal{A}(h \circ f,B,D) = \mathcal{A}(h,C,D) \cdot \mathcal{A}(f,B,C)$;

(iv) *f ist ein Isomorphismus g.d.w. $\mathcal{A}(f,B,C)$ invertierbar (regulär) ist. In diesem Fall gilt auch $\mathcal{A}(f^{-1},C,B) = \mathcal{A}(f,B,C)^{-1}$.*

Ein Homomorphismus $f : U \to V$ ist also ein Isomorphismus g.d.w. die Darstellungsmatrix **regulär** bzw. invertierbar ist. Eine nicht invertierbare Matrix heisst auch **singulär**.

Satz 6.34: *Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über K, $\dim(V) = m$, $\dim(W) = n$, und seien B, C geordnete Basen. Dann ist die Zuordnung*

$$h \;\longrightarrow\; \mathcal{A}(h,B,C)$$

ein Vektorraumisomorphismus von $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ nach $\mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$.

Basistransformation

$$\begin{tikzcd}
V = \langle B \rangle \arrow[r, "h;\ \mathcal{A}(h,B,C)"] & W = \langle C \rangle \arrow[d, "\mathrm{id};\ \mathcal{A}^{C}_{C'}"] \\
V = \langle B' \rangle \arrow[u, "\mathrm{id};\ \mathcal{A}^{B'}_{B}"] \arrow[r, "h;\ \mathcal{A}(h,B',C')"'] & W = \langle C' \rangle
\end{tikzcd}$$

Fig. 6.1: Darstellungstransformation

Wir haben bisher untersucht, wie wir für fix bewählte Basen B bzw. C der Vektorräume V bzw. W eine lineare Abbildung $h : V \to W$ durch eine Matrix darstellen können. Wie aber verändert sich die Darstellungsmatrix, wenn wir neue Basen B' bzw. C' wählen? Damit wollen wir uns nun befassen.

Definition 6.35: *Seien B und B' Basen des m-dimensionalen Vektorraums V über K. Dann heisst*

$$\mathcal{A}^{B}_{B'} \ := \ \mathcal{A}(\mathrm{id}, B, B')$$

die **Basistransformationsmatrix** *von B nach B'.*

Satz 6.36: *Seien B und B' Basen des m-dimensionalen Vektorraums V über K. Dann gilt:*

(i) für alle $v \in V$: $(v)_{B'} = \mathcal{A}^{B}_{B'} \cdot (v)_B$;

(ii) $\mathcal{A}^{B}_{B'}$ ist invertierbar (regulär) und zwar $\left(\mathcal{A}^{B}_{B'}\right)^{-1} = \mathcal{A}^{B'}_{B}$;

(iii) $\mathcal{A}^{B}_{B'} = I_m$ g.d.w. $B = B'$.

Beispiel 6.37: Sei $B = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ und sei B' die kanonische Basis von $\mathbb{R}^3$. Dann ist

$$\mathcal{A}^{B}_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{A}^{B'}_{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Die Koordinaten von $v = (1,2,3)$ bzgl. B sind gegeben durch

$$(v)_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (v)_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} . \qquad \square$$

Wir kehren nun zum oben beschriebenen Problem zurück: wie verändert sich die Darstellungsmatrix eines Homomorphismus $h : V \to W$, wenn wir die Basen der Vektorräume ändern? Die Situation stellt sich dar wie in Fig. 6.1.

Satz 6.38: *Seien B und B' geordnete Basen des m-dimensionalen Vektorraums V über K, und seien C und C' geordnete Basen des n-dimensionalen Vektorraums W über K. Sei $h : V \to W \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$. Dann gilt für die Darstellungsmatrizen:*

$$\mathcal{A}(h, B', C') = \mathcal{A}^{C}_{C'} \cdot \mathcal{A}(h,B,C) \cdot \mathcal{A}^{B'}_{B} \ .$$

Beispiel 6.39: Als Beispiel betrachten wir die Differentiationsabbildung

$$\begin{array}{rlcl} D: & \mathrm{Pol}_4(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) \\ & p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 & \mapsto & p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 \end{array} .$$

Als Basen von $\mathrm{Pol}_4(\mathbb{R})$ betrachten wir

$$B = (1, x, x^2, x^3, x^4) \quad \text{und} \quad B' = (1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2), x(x-1)(x-2)(x-3)) ,$$

und als Basen von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ betrachten wir

$$C = (1, x, x^2, x^3) \quad \text{und} \quad C' = (1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2)) .$$

Es ist klar, wie wir aus der Darstellung eines Polynoms p bzgl. B die Darstellung von $D(p) = p'$ bzgl. C bekommen. Wie aber ergibt sich aus der Darstellung von p bzgl. B' die Darstellung von $D(p) = p'$ bzgl. C'?
Offensichtlich können wir die Basistransformationsmatrix von B' nach B sofort angeben, als Inverse davon erhalten wir die Basistransformationsmatrix von B nach B'. Ebenso für die Basen C und C'. Dabei erhalten wir die folgenden Basistransformationsmatrizen:

$$\mathcal{A}_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \mathcal{A}_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

$$\mathcal{A}_C^{C'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \mathcal{A}_{C'}^{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Die Darstellungsmatrix der Differentialabbildung D bzgl. der Basen B und C ist

$$\mathcal{A}(D, B, C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

Mittels Satz 6.38 berechnet sich daraus die Darstellungsmatrix von D bzgl. der Basen B' und C' als

$$\mathcal{A}(D, B', C') = \mathcal{A}_{C'}^{C} \cdot \mathcal{A}(D, B, C) \cdot \mathcal{A}_B^{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

Wir überprüfen das Ergebnis am Polynom $p(x) = x^2 + 2x^3 - x^4$.

$$(p)_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} , \quad (p)_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} , \quad (D(p))_{C'} = \mathcal{A}(D, B', C') \cdot (p)_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} ,$$

also $D(p) = 4c_2' - 6c_3' - 4c_4' = 2x + 6x^2 - 4x^3$.

Alle diese Berechnungen können wie folgt in Maple 9.5 durchgeführt werden:

```
> with(LinearAlgebra);
> B := <1, x, x^2, x^3, x^4>;
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{bmatrix}$$

```
> Bp := <1, x, x*(x-1), x*(x-1)*(x-2), x*(x-1)*(x-2)*(x-3)>;
```

$$Bp := \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x(x-1) \\ x(x-1)(x-2) \\ x(x-1)(x-2)(x-3) \end{bmatrix}$$

```
> C := <1, x, x^2, x^3>;
```

$$C := \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

```
> Cp := <1, x, x*(x-1), x*(x-1)*(x-2)>;
```

$$Cp := \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x(x-1) \\ x(x-1)(x-2) \end{bmatrix}$$

```
> ABpB := Matrix([[1,0,0,0,0],[0,1,-1,2,-6],[0,0,1,-3,11], [0,0,0,1,-6],
>                          [0,0,0,0,1]]);
```

$$ABpB := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> ABBp := MatrixInverse(ABpB);
```

$$ABBp := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> **ACpC := Matrix([[1,0,0,0],[0,1,-1,2],[0,0,1,-3], [0,0,0,1]]);**

$$ACpC := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> **ACCp := MatrixInverse(ACpC);**

$$ACCp := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> **ADBC := Matrix([[0,1,0,0,0],[0,0,2,0,0],[0,0,0,3,0], [0,0,0,0,4]]);**

$$ADBC := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

> **ADBpCp := ACCp . ADBC . ABpB;**

$$ADBpCp := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

> **p := x∧2+2∗x∧3-x∧4;**

$$p := x^2 + 2x^3 - x^4$$

> **pBp := ABBp . <0,0,1,2,-1>;**

$$pBp := \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

> **Dpp := ADBpCp . pBp;**

$$Dpp := \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

> **expand(Transpose(Dpp).Cp);**

$$2x + 6x^2 - 4x^3$$

Alle diese Operationen können also mittels Maple ausgeführt werden. □

Satz 6.40: *Sei B eine geordnete Basis des m-dimensionalen Vektorraums V über K, und sei C eine geordnete Basis des n-dimensionalen Vektorraums W über K. Seien $X, Y \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$, und seien P, Q invertierbare Matrizen, sodass gilt $Y = Q^{-1}XP$. Dann gibt es geordnete Basen B' bzw. C' von V bzw. W und eine lineare Abbildung $h : V \to W$, sodass*

$$X = \mathcal{A}(h, B, C) \quad \text{und} \quad Y = \mathcal{A}(h, B', C') \ .$$

Aus Satz 6.38 und Satz 6.40 sehen wir, dass der Rang einer Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung h unabhängig ist von der Wahl der Basen. Das gibt Anlass zu folgender Definition.

Definition 6.41: *Sei $h : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen den endlichdimensionalen Vektorräumen V und W. Der* **Rang** *von h ist der Rang einer Darstellungsmatrix (bzgl. beliebiger Basen) von h.*

Als unmittelbare Folgerung von Satz 6.38 sehen wir, dass für $h \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$ und geordnete Basen B und B' von V gilt:

$$\mathcal{A}(h, B', B') = \mathcal{A}^B_{B'} \cdot \mathcal{A}(h, B, B) \cdot \left(\mathcal{A}^B_{B'}\right)^{-1} \ .$$

Dadurch ist die folgende Definition motiviert.

Definition 6.42: *Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$. B heisst* **ähnlich** *oder* **konjugiert** *zu A, in Zeichen $B \sim A$, wenn es eine invertierbare Matrix P gibt, sodass $B = P^{-1}AP$.*

Man prüft leicht nach, dass diese Ähnlichkeitsrelation $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Satz 6.43: *Zwei $n\times n$ Matrizen A und B sind ähnlich g.d.w. sie dieselbe lineare Abbildung darstellen, eventuell bzgl. verschiedener geordneter Basen.*

Basistransformationsmatrizen sind also invertierbare $n \times n$-Matrizen. Andererseits tranformiert jede invertierbare Matrix Basen in Basen (vgl. Satz 6.9). Da invertierbare Matrizen auf diese Weise sehr eng mit linearen Abbildungen zusammenhängen, nennt man die Gruppe der invertierbaren Matrizen zusammen mit der Matrizenmultiplikation die allgemeine lineare Gruppe (general linear group).

Definition 6.44: *Die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über dem Körper K heisst die* **allgemeine linear Gruppe** *(***general linear group***) vom Grad n über K, und sie wird bezeichnet mit $GL_n(K)$.*