

Name:

Matr.Nr.:

Stud.Kennz.:

Klausur
“Lineare Algebra und Analytische Geometrie I” (326006)
 31.1.2009

Bitte folgendes beachten:

- Schriftliche Unterlagen sowie elektronische Geräte dürfen NICHT zur Klausur verwendet werden.
- Tragen Sie – noch bevor Sie zu arbeiten beginnen – auf dem Angabenblatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Studienkennzahl ein. Schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie verwenden, links oben Ihren Namen.
- Geben Sie das ausgefüllte Angabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab. Sie finden das Angabenblatt demnächst im Netz.
- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt (oder mehrere), und geben Sie Ihre Lösungen nach Aufgabennummern geordnet ab, also beginnend mit der ersten Aufgabe.

Alle Lösungen sind zu begründen !

- (1) Seien A und B Mengen. Sei \sim eine Äquivalenzrelation auf A , $K_{\sim}(a)$ die Äquivalenzklasse von a bzgl. \sim .
 Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:
- (a) $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$
 - (b) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A$
 - (c) $\forall a, b \in A : [K_{\sim}(a) \cap K_{\sim}(b) = \emptyset] \vee [K_{\sim}(a) = K_{\sim}(b)]$

- (2) Sei A die folgende Matrix über \mathbb{R} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Bestimmen Sie die Hermite-Matrix H_A zur Matrix A , sowie den Rang von A .
- (b) Bestimmen Sie den Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$.
- (b) Für $b_1 = (1, 2, 1)^T$, $b_2 = (1, 1, 1)^T$ bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems $A \cdot x = b_i$.

(3) Zeigen Sie für $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$:

$$[\forall b \in \mathbb{R}_n : A \cdot x = b \text{ ist lösbar}] \iff [A \text{ ist regulär}]$$

(4) Sei f die folgende lineare Abbildung zwischen den reellen Vektorräumen \mathbb{R}^4 und \mathbb{R}^3 :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, w) & \mapsto & (x - z, w, y + w) \end{array}$$

- (a) Bestimmen Sie Bild und Kern von f , also $\text{im}(f)$ und $\text{kern}(f)$.
- (b) Geben Sie ein Repräsentantensystem an für den Faktorraum $\mathbb{R}^4/\text{kern}(f)$.
- (c) Geben Sie einen Isomorphismus

$$\iota : \mathbb{R}^4/\text{kern}(f) \longrightarrow \text{im}(f)$$

an.

(5) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\text{Pol}_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens n über \mathbb{R} . Sowohl $B = (1, x, x^2)$ als auch $C = (1, x - 1, (x - 1)^2)$ sind geordnete Basen von $\text{Pol}_2(\mathbb{R})$.

Sei d die Differentiationsabbildung (Definitionsbereich korrigiert von Pol_3 zu Pol_2)

$$d : \begin{array}{ccc} \text{Pol}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \text{Pol}_2(\mathbb{R}) \\ a_0 + a_1x + a_2x^2 & \mapsto & a_1 + 2a_2x \end{array}$$

- (a) Bestimmen Sie die Basistransformationsmatrizen

$$\mathcal{A}_C^B \quad \text{und} \quad \mathcal{A}_B^C .$$

- (b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen von d sowohl bzgl. B als auch bzgl. C , also

$$\mathcal{A}(d, B, B) \quad \text{sowie} \quad \mathcal{A}(d, C, C) .$$

(6) Wir betrachten die reellen Vektorräume $V = \mathbb{R}^3$ und $W = \mathbb{R}^2$.

- (a) Geben Sie eine Basis B für $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$, also den Vektorraum der linearen Abbildungen von V nach W , an.
- (b) Stellen Sie die lineare Abbildung

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2x + z, y - z) \end{array}$$

als Linearkombination der Basiselemente in B dar.