Name: ....

Matr.Nr.: ....

Stud.Kennz.: ....

Klausur
"Lineare Algebra und Analytische Geometrie I" (326006)
31.1.2009

Bitte folgendes beachten:

- *Schriftliche Unterlagen sowie elektronische Geräte dürfen NICHT zur Klausur verwendet werden.*
- *Tragen Sie – noch bevor Sie zu arbeiten beginnen — auf dem Angabenblatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Studienkennzahl ein. Schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie verwenden, links oben Ihren Namen.*
- *Geben Sie das ausgefüllte Angabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab. Sie finden das Angabenblatt demnächst im Netz.*
- *Verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt (oder mehrere), und geben Sie Ihre Lösungen nach Aufgabennummern geordnet ab, also beginnend mit der ersten Aufgabe.*

Alle Lösungen sind zu begründen !

(1) Seien A und B Mengen. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A, $K_\sim(a)$ die Äquivalenzklasse von a bzgl. $\sim$.
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:
(a) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A$
(b) $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$
(c) $\forall a, b \in A: \; [K_\sim(a) \cap K_\sim(b) = \emptyset] \;\vee\; [K_\sim(a) = K_\sim(b)]$

(2) Sei A die folgende Matrix über $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Hermite-Matrix H_A zur Matrix A, sowie den Rang von A.
(b) Bestimmen Sie den Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$.
(b) Für $b_1 = (1,0,1)^T, b_2 = (1,2,1)^T$ bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems $A \cdot x = b_i$.

(3) Zeigen Sie für $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$:

$$[\,\forall b \in \mathbb{R}_n : \; A\cdot x = b \text{ ist lŏsbar}\,] \quad \Longleftrightarrow \quad [\,\mathrm{rang}(A) = n\,]$$

(4) Sei f die folgende lineare Abbildung zwischen den reellen Vektorräumen $\mathbb{R}^4$ und $\mathbb{R}^3$:

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,w) & \mapsto & (x-z, w, y+w) \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie Bild und Kern von f, also $\mathrm{im}(f)$ und $\mathrm{kern}(f)$.
(b) Geben Sie ein Repräsentantensystem an für den Faktorraum $\mathbb{R}^4/\mathrm{kern}(f)$.
(c) Geben Sie einen Isomorphismus

$$\iota : \mathbb{R}^4/\mathrm{kern}(f) \longrightarrow \mathrm{im}(f)$$

an.

(5) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens n über $\mathbb{R}$. Sowohl $B = (1, x, x^2)$ als auch $C = ((x-1)^2, x-1, 1)$ sind geordnete Basen von $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$.
Sei d die Differentiationsabbildung (Definitionsbereich korrigiert von Pol_3 zu Pol_2)

$$d: \begin{array}{ccc} \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}) \\ a_0 + a_1x + a_2x^2 & \mapsto & a_1 + 2a_2x \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie die Basistransformationsmatrizen

$$\mathcal{A}_C^B \qquad \text{und} \qquad \mathcal{A}_B^C \; .$$

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen von d sowohl bzgl. B als auch bzgl. C, also

$$\mathcal{A}(d, B, B) \qquad \text{sowie} \qquad \mathcal{A}(d, C, C) \; .$$

(6) Wir betrachten die reellen Vektorräume $V = \mathbb{R}^2$ und $W = \mathbb{R}^3$.
(a) Geben Sie eine Basis B für $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$, also den Vektorraum der linearen Abbildungen von V nach W, an.
(b) Stellen Sie die lineare Abbildung

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+y, y, x-y) \end{array}$$

als Linearkombination der Basiselemente in B dar.