

Name:

Matr.Nr.:

Stud.Kennz.:

Klausur
“Lineare Algebra und Analytische Geometrie I” (326006)
 24.4.2009

Bitte folgendes beachten:

- Schriftliche Unterlagen sowie elektronische Geräte dürfen NICHT zur Klausur verwendet werden.
 - Tragen Sie – noch bevor Sie zu arbeiten beginnen — auf dem Angabenblatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Studienkennzahl ein. Schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie verwenden, links oben Ihren Namen.
 - Geben Sie das ausgefüllte Angabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab. Sie finden das Angabenblatt demnächst im Netz.
 - Verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt (oder mehrere), und geben Sie Ihre Lösungen nach Aufgabennummern geordnet ab, also beginnend mit der ersten Aufgabe.
-

Alle Lösungen sind zu begründen !

- (1) Sei R eine Relation auf der Menge A . Für $(a, b) \in R$ schreiben wir auch aRb . Was bedeuten die folgenden Begriffe (geben Sie Definitionen an) ?
- (a) R ist reflexiv;
 - (b) R ist symmetrisch;
 - (c) R ist antisymmetrisch;
 - (d) R ist transitiv;
 - (e) R ist eine Ordnungsrelation;
 - (f) R ist eine Äquivalenzrelation.

- (2) Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir in \mathbb{N}^3 die Mengen

$$S_n = \{(u, v, w) \mid u + v + w = n\}, \quad T_n = \{(u, v, w) \mid u + v + w \leq n\}.$$

Zeigen Sie (eventuell durch Induktion über n):

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|S_n| = \frac{1}{2} \cdot (n+1)(n+2)$.

[Zusatzbeispiel: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|T_n| = \binom{n+3}{n}$.]

(3) Sei A die folgende Matrix über \mathbb{R} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Bestimmen Sie die Hermite-Matrix H_A zur Matrix A , sowie den Rang von A .
- (b) Bestimmen Sie den Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$.
- (c) Für $b_1 = (2, 1, 2)^T, b_2 = (1, 1, 1)^T$ bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems $A \cdot x = b_i$.

(4) (a) Konstruieren Sie eine 3×3 -Matrix A über \mathbb{R} , sodass das Gleichungssystem

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

den von $(1, 1, 0)^T$ und $(1, 0, 1)^T$ aufgespannten Raum als Lösungsraum hat.

(b) Sei A eine $n \times n$ -Matrix über \mathbb{R} , und sei $L_A \subseteq \mathbb{R}^n$ der Lösungsraum des Gleichungssystems

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wie hängen $n, \dim(L_A)$ und $\text{rang}(A)$ zusammen?

(5) Für $a \in \mathbb{R}$ sei A_a die Matrix

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ a & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Determinante von A_a in Abhängigkeit von a .
- (b) Für welche Werte von a hat das Gleichungssystem

$$A_a \cdot x = 0$$

mehr als nur eine Lösung? Berechnen Sie für einen dieser Werte von a die Lösungsmenge von $A_a \cdot x = 0$.

(6) Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume über K . Sei B eine Basis von V und sei C eine Basis von W . Weiters sei $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung von V nach W .

Zeigen Sie:

- (a) f ist injektiv gdw $f(B)$ ist linear unabhängig in W .
- (b) f ist surjektiv gdw $C \subseteq f(V)$.