Übungen zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1, WS 07/08
0. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 13.10.2008
[*** Dieses Übungsblatt ist noch freiwillig! ***]

0.1. (Mengen) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? (Begründung!)

(a)	$\{1\} = \{\{1\}\}$	$\{1\} = \{1,1\}$	$\{1,2\}=\{\{1\},2\}$
(b)	$\{\{2\},1\}=\{\{1\},2\}$	$\{2,\{1\}\}=\{\{1\},2\}$	$\{\}=\{\{\}\}$
(c)	$\{\}=\{0\}$	$0\in\{\}$	$\{\}\subseteq\{1\}$
(d)	$\{\} \in \{1\}$	$\{\} \in \{\{\}\}$	$\{\}\subseteq\{\{\}\}$
(e)	$2\in\{1,\{2\}\}$	$\{1\}\in\{1,\{2\}\}$	$\{2\}\in\{1,\{2\}\}$
(f)	$1\subseteq\{1\}$	$1 \in \{\{1\}\}$	$\{1,2\}\subseteq\{1,2,3\}$
(g)	$\{1,2\}\in\{1,2,3\}$	$\{1,2\}\in\{\{1,2\},3\}$	$\{1,2\}\in\{\{1,2,3\}\}$

0.2. (Mengen) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? (Begründung!)

(a)	$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$	$\mathbb{N}\subseteq\{\mathbb{N},\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{Q}\in\mathbb{R}$
(b)	$\{1\}\in\mathbb{N}$	$1\in\mathbb{N}$	$1\in\{\mathbb{N}\}$
(c)	$\mathbb{N}\subseteq\{\mathbb{N}\}$	$\{\mathbb{N}\}\subseteq\{\{\mathbb{N}\},\mathbb{Z}\}$	$\{\mathbb{Z}\}\subseteq\{\{\mathbb{N}\},\mathbb{Z}\}$
(d)	$\{\mathbb{N}\}\in\{\mathbb{N},\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{Z}\in\{\mathbb{N},\mathbb{Z}\}$	$\{\} \in \mathbb{N}$
(e)	$\{\} \subseteq \{\mathbb{N}\}$	$\{\} \subseteq \mathbb{N}$	$\mathbb{Z}\in\mathbb{N}$

0.3. (Aussagen) Bestimmen Sie den Wahrheitswert folgender Aussagen und formulieren sie jeweils die Negation (das Gegenteil).

- Zu jeder natürlichen Zahl gibt es zumindest eine größere.
- Jede ganze Zahl ist das Produkt zweier natürlicher Zahlen.
- Es gibt eine reelle Zahl, die die Summe zweier kleinerer natürlichen Zahlen ist.
- Die Summe zweier beliebiger ganzen Zahlen ist wieder eine ganze Zahl.
- Es gibt mindestens eine natürliche Zahl, die nicht kleiner als die Summe der um eins bzw. um zwei verminderten Zahl ist.
- Für jedes Element n aus $\mathbb{N}$ gibt es eine Teilmenge B von $\mathbb{N}$, sodass alle Zahlen, die größer als n sind, nicht in B liegen.
- Der Betrag einer komplexen Zahl $z\neq 0$ ist größer gleich der Summe ihres Real- und Imaginärteils.
- Es gibt eine reelle Zahl, die größer als alle positiven natürliche Zahlen ist.
- Die Differenz einer reellen und einer anderen rellen Zahl ist immer ungleich 0.
- Zu jeder natürlichen Zahl gibt es zumindest eine größere.

0.4. (Vektorrechnung) Durch ein Dreieck mit den Eckpunkten A = (3,0,0) cm, B = (0,3,0) cm und C = (3,3,3) cm strömt ein Gas, das die Geschwindigkeit v = 40 cm/s in Richtung (1,1,1) hat. Welches Gasvolumen strömt in 10 s durch?

0.5. (Natürliche Zahlen) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion (Bernoullische Ungleichung) :

Für alle a aus]-1,oo[und für alle n aus $\mathbb{N}$ gilt: $(1+a)^n \geq 1+na$

Zusatzfrage : Sind die Voraussetzungen an a und n wirklich notwendig?

0.6. (Analytische Geometrie) Gegeben sei die parametrisierte Kurve

$\boldsymbol{k}(t) = (x(t),y(t),z(t)) = (\ 1+ \sin t,\ 1 - \sin t,\ \sqrt{2}\cos t\ )$

(a) Zeigen Sie, dass die Kurve in einer Ebene liegt und bestimmen Sie die Gleichung dieser Ebene.

(b) Zeigen Sie, dass alle Punkte der Kurve denselben Abstand vom Punkt (1,1,0) haben und bestimmen Sie diesen Abstand.

0.7. (Trigonometrie) Durch einen Stadtturm verläuft eine geradlinige Straße. Entlang der Straße stehen in einer Entfernung von je 200m Marksteine. Von der Spitze des Turmes erscheint die Strecke zwischen erstem und zweitem Stein unter einem Sehwinkel von 10,2°. Wie hoch ist der Turm, wenn der erste Stein ebenfalls 200m vom Fußpunkt des Turmes entfernt ist?

Lösen Sie das Beispiel rechnerisch und überprüfen Sie die Korrektheit Ihrer Lösung anhand einer Skizze.

0.8. (Lineares Gleichungssystem) Gegeben sei folgendes Gleichungssystem :

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & & + & z & - & u & = & 2 \\ 2x & + & y & + & z & + & u & = & 5 \\ x & + & y & & & + & 2u & = & 3 \\ 4x & + & 2y & + & 2z & + & 2u & = & 10 \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems in parametrisierter Form, d.h. in der Form

$L = \{(x,y,z,u)\in\mathbb{R}^4 \mid (x,y,z,u) = (x_0,y_0,z_0,u_0) + \lambda_1(x_1,y_1,z_1,u_1) + \lambda_2(x_2,y_2,z_2,u_2) + \lambda_3(x_3,y_3,z_3,u_3)\}$

(b) Betrachten Sie das Gleichungssystem („homogenes lineares Gleichungssystem“)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & & + & z & - & u & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & + & u & = & 0 \\ x & + & y & & & + & 2u & = & 0 \\ 4x & + & 2y & + & 2z & + & 2u & = & 0 \end{array}$$

Gibt es einen Zusammenhang zwischen der Lösung dieses Systems und der Lösung des Systems aus (a) zusammen?

0.9. (Komplexe Zahlen) Beweisen Sie die folgenden trigonometrischen Beziehungen :

$\cos(3\varphi) = 4\cos^3(\varphi) - 3\cos(\varphi)$

$\sin(3\varphi) = 3\sin\varphi - 4\sin^3(\varphi)$

<u>Hinweis :</u> Formel von Moivre : Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$: $(\ \cos\varphi + i \sin\varphi\ )^3 = \cos(3\varphi) + i \sin(3\varphi)$

0.10. (Vektorräume) Versuchen Sie, folgende Behauptung zu beweisen :

Der Durchschnitt zweier beliebiger Unterräume des $\mathbb{R}^3$ ist wieder ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$. (Ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$ sei entweder der $\mathbb{R}^3$ selbst, eine Ebene durch den Ursprung, eine Gerade durch den Ursprung oder {0,0,0} selbst.)

<u>Zusatzfrage :</u> Gilt die Behauptung auch für die Vereinigung zweier beliebiger Unterräume des $\mathbb{R}^3$?