

**Übungen zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1, WS 08/09**  
**1. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 20.10.2008**

**ACHTUNG!**

**Gerechnete Beispiele bis spätestens Mo. 20.10. 08:15 im KG 4. Stock auf den ausgehängten Gruppenlisten ankreuzen.**

- 1.1. Zeigen (d.h. beweisen) Sie folgende Aussagen **ausschließlich unter Verwendung von Definition 1.2.1, Skript**. Sie dürfen jedoch eine hier bereits gezeigte Aussage verwenden, um eine andere zu zeigen. Achten Sie aber dabei darauf, nicht „im Kreis“ zu gehen, d.h. etwa (1) für (2) zu verwenden, (2) für (4) und (4) für (1). So dürfen Sie etwa die Kommutativität nicht verwenden, wenn nicht bereits Punkt (4) gezeigt wurde!  
**Achtung: Geben Sie für jeden einzelnen Zwischenschritt ihrer Beweise an, welchen Teil von 1.2.1 sie verwenden bzw. warum dieser Schritt gültig ist.**
1.  $S(n) = n + 1$
  2.  $S(k) + L = S(k + L)$
  3.  $0 + n = n$
- 1.2. (Fortsetzung von 1.1)
4.  $k + L = L + k$
  5.  $k + (L + m) = (k + L) + m$
- 1.3. Wie Beispiel 1.1 und 1.2, aber unter Verwendung von **Definition 1.2.2, Skript**. Auch Definition 1.2.1 und Beispiel 1.1. und 1.2 dürfen hier verwendet werden.
1.  $0 \cdot n = 0$
  2.  $S(k) \cdot L = k \cdot L + L$
  3.  $k \cdot L = L \cdot k$
  4.  $n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$
- 1.4. (Fortsetzung von 1.3)
5.  $k \cdot (L + m) = k \cdot L + k \cdot m$
  6.  $(k + L) \cdot m = k \cdot m + L \cdot m$
  7.  $k \cdot (L \cdot m) = (k \cdot L) \cdot m$
- 1.5. Zeigen Sie mit Hilfe des Induktionsprinzips, dass jede nichtleere *endliche* Menge reeller Zahlen ein größtes und ein kleinstes Element besitzt.
- 1.6. Zeigen Sie mit Induktion :  
Sei  $M$  eine endliche Menge mit  $n$  Elementen. Dann gilt :  $P(M)$ , die Potenzmenge von  $M$  (d.h. die Menge aller Teilmengen von  $M$ ) hat  $2^n$  Elemente.
- 1.7. (a) Zeigen Sie (ohne Verwendung der floor-Funktion o.ä.) :  
Zu jeder **rationalen** Zahl  $r$  gibt es eine natürliche Zahl  $n$  mit  $n > r$ .  
(b) Zeigen Sie : Zu jeder **rationalen** Zahl  $\varepsilon > 0$  gibt es  $m \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{m} < \varepsilon$ .

1.8. Finden Sie  $x, y \in \mathbb{Z}$  mit  $123x + 45y = \text{ggT}(123,45)$ .

1.9. Zeigen Sie :  $\sqrt{p}$  mit  $p$  Primzahl ist immer irrational.

1.10. Zeigen Sie für natürliche Zahlen  $a, b$  die Verschmelzungsgesetze des zugehörigen Teilerverbandes, d.h. zeigen Sie :

(a)  $\text{ggT}(a, \text{kgV}(b,a)) = a$ .

(b)  $\text{kgV}(a, \text{ggT}(b,a)) = a$ .

1.11. (a) Zeigen Sie : Eine komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}$  ist genau dann reell, wenn  $z = \bar{z}$ .

(b) Stellen Sie die Menge  $M = \{ z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| < 3 \text{ und } \text{Re}(z) < \text{Im}(z) \}$  in der Gauß'schen Zahlenebene grafisch dar.