Übungen zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1, WS 07/08
2. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 27. 10. 2008.

2.1 (*Symmetrische Differenz*). Beweisen Sie folgende Beziehungen aus Satz 1.3.7: Für drei beliebige Mengen A, B und C gelten

(a) $A \triangle B = B \triangle A$,

(b) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

2.2 (*Mengenbeziehungen*). Beweisen Sie folgende Beziehungen aus Satz 1.3.7: Für zwei beliebige Mengen A und B gelten

(a) $A \cap A = A \cup A = A$,

(b) $A \cup (A \cap B) = A = A \cap (A \cup B)$.

2.3 (*Funktionale und inverse Relationen*). Sind die folgenden Relationen zwischen den Mengen $A = \{a, b, c, d\}$ und $B = \{1, 2, 3\}$ funktional? Ist jeweils die inverse Relation funktional?

(a) $R_1 := \{(a, 3), (b, 1), (c, 2), (a, 1), (b, 3)\}$,

(b) $R_2 := \{(a, 1), (d, 1), (b, 1), (c, 1)\}$,

(c) $R_3 := \{(b, 1), (a, 3), (d, 2)\}$,

(d) $R_4 := \{(a, 1), (b, 3), (c, 1), (d, 2)\}$.

2.4 (*Äquivalenzrelationen*). Sind die foldengen Relationen Äquivlenzrelationen? Wenn ja, geben Sie einen Beweis an; wenn nicht, geben Sie ein Bespiel dafür an, welche Eigenschaft verletzt ist.

(a) $R_1 := \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid 5|(a - b)\}$,

(b) $R_2 := \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a < b \text{ oder } aR_1b\}$,

(c) $R_3 := \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid \text{ggT}(a, b) = 2\}$,

(d) $R_4 := \{(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^2 \mid A \text{ und } B \text{ sind endlich}\}$,[1]

(e) $R_5 := \{((a, b), (a', b')) \in (\mathbb{Z}^2)^2 \mid b'\, a - b\, a' = 0\}$.

2.5 (*Ordnungsrelationen*). Sind die folgenden Relationen Ordnungsrelationen? Wenn ja, geben Sie einen Beweis an; wenn nicht, geben Sie ein Bespiel dafür an, welche Eigenschaft verletzt ist.

(a) $R_1 := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(a) < \cos(b)\}$,

(b) $R_2 := \{(a, b) \in W^2 \mid a \text{ ist (textuell) enthalten in } b\}$ wobei W die Menge aller deutschen Wörter bezeichne,[2]

(c) $R_3 := \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a > b\}$,

(d) $R_4 := \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a \geq b\}$,

(e) $R_5 := \emptyset$.

2.6 (*Relationen*). Beweisen Sie

(a) Ist R eine Äquivalenzrelation auf A, dann ist auch R^{-1} eine Äquvalenzrelation.

(b) Seien M und N Mengen mit den Ordnungsrelationen R_M und R_N. Dann ist $R_{M\times N} := \{((a,b),(x,y)) \in (M \times N)^2 \mid aR_Mx \text{ und } bR_Ny\}$ eine Ordnungsrelation auf $M \times N$.

(c) Es gibt 2^{n^2} (zweistellige) Relation auf einer Menge mit n Elementen.

2.7 (*Relationen*). Welche der Eigenschaften aus Definition 1.3.5 besitzen die folgenden Relationen:

(a) $R_1 := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(a) = \sin(b)\}$,

(b) $R_2 := \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 \mid a - b \text{ ist reell}\}$,

(c) $R_3 := \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid 5|ab\}$.

2.8 (*Komplexe Zahlen*). Berechnen Sie:

(a) $(1+i)(1-2i) + (3+i)$,

(b) $(2+3i)^{-1}$,

(c) $(7+i)/(1+i)$,

(d) $(2-i)^3$,

(e) $1/\sqrt{3}i$.

Das Ergebnis ist jeweils in der Form $a + b\,i$ anzugeben mit $a, b \in \mathbb{R}$.

2.9 (*Komplexe Zahlen*). Geben Sie Lösungen für die Gleichungen an:

(a) $x^2 = -1$,

(b) $(i-2) \cdot x + i = 1/(3i)$,

(c) $i \cdot x^2 + 2i \cdot x = i$.

Das Ergebnis ist jeweils in der Form $a + b\,i$ anzugeben mit $a, b \in \mathbb{R}$.

[1] Erinnerung: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist die *Potenzmenge* von $\mathbb{N}$.

[2] Z. B. ist „Alge“ enthalten in „Algebra“, aber nicht in „Geometrie“.