Übungen zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1, WS 07/08
3. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 3. 11. 2008.

3.1 (*Äquivalenzklassen*). Geben Sie mit Begründung die Äquivalenzklassen und Repräsentantensysteme für die folgenden Äquivalenzrelationen an:

(a) Die Gleichheit als Relation einer beliebigen (nichtleeren) Menge A.

(b) Die Gleichmächtigkeit auf der Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$.

3.2 (*Äquivalenzklassen II*).

(a) Die Allrelation als Relation einer beliebigen (nichtleeren) Menge A.

(b) Die Relation $\{(a,b) \in A \times A \mid f(a) = f(b)\}$, wobei $f : A \to B$ eine beliebige Funktion und A sowie B beliebige (nichtleere) Menge seien.

3.3 (*Injektivität und Surjektivität I*). Sind die folgenden Funktionen injektiv, surjektiv oder bijektiv? Geben Sie jeweils eine Begründung an!

(a) $f_1 = \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(b) $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto 2x - i$.

(c) $f_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto 2x + 1$.

3.4 (*Injektivität und Surjektivität II*). Sind die folgenden Funktionen injektiv, surjektiv oder bijektiv? Geben Sie jeweils eine Begründung an!

(a) $f_1 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $(x,y) \mapsto x - y$.

(b) $f_2 : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, wobei $n \in \mathbb{N}$ die Menge seiner Teiler zugeordnet wird.

(c) $f_3 = \cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$.

3.5 (*Injektivität und Surjektivität III*). Sind die folgenden Funktionen injektiv, surjektiv oder bijektiv? Geben Sie jeweils eine Begründung an!

(a) $f_1 : [0, \infty[\to [0, \infty[$, $x \mapsto x^2$.

(b) $f_2 : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$, $(x,y) \mapsto (x - y, y - 2x)$.

(c) $f_3 : \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $(a,b) \mapsto \mathrm{ggT}(a,b)$.

3.6 (*Ordnungsrelationen*). Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm für die Ordnungsrelation $|$ („Teiler von“) auf der Menge $\{5, \dots, 25\}$. Was sind die maximalen und minimalen Elemente. Gibt es ein größtes oder ein kleinstes Element?

3.7 (*Satz 1.3.41(i)*). Beweisen Sie Satz 1.3.41(i): Sei $f : A \to B$ eine Funktion. f ist injektiv g. d. w. für alle Funktionen $g, h : C \to A$ gilt:

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

Anmerkung: Diese Aussage ist bereits in der Vorlesung bewiesen worden. Hier ist es so gedacht, dass Sie den Beweis noch einmal durchgehen und soweit verstehen, dass Sie ihn in der Übung vorführen können.

3.8 (*Satz 1.3.41(ii)*). Beweisen Sie Satz 1.3.41(ii): Sei $f : A \to B$ eine Funktion. f ist surjektiv g. d. w. für alle Funktionen $g, h : B \to C$ gilt:

$$g \circ f = h \circ f \implies g = h.$$

3.9 (*Gleichmächtige Mengen*). Zeigen Sie: Wenn $f : A \to B$ injektiv ist, und $|A| = |A'|$, $|B| = |B'|$, dann gibt es eine injektive Funktion $f' : A' \to B'$.