auszuarbeiten bis 10. November

Aufgabe 4. 1. Geben Sie für jede der folgenden Äquivalenzrelationen in der Menge A ein Repräsentantensystem an.

1. $A = \mathbb{Z}$, $\quad x \sim y :\iff 5 \mid x - y$
2. $A = \mathbb{R}$, $\quad x \sim y :\iff x - y \in \mathbb{Z}$
3. $A = \mathbb{R}^2$, $\quad (x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) :\iff x_1 + y_2 = x_2 + y_1$

Aufgabe 4. 2. Es sei $M = \{n \in \mathbb{N} : n|60\}$ die Menge aller Teiler der natürlichen Zahl 60. In M betrachten wir die Relation $a \leq b :\iff a|b$.

1. Zeigen Sie, daß $(M, \leq)$ eine geordnete Menge ist.
2. Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm von $(M, \leq)$.
3. Bestimmen Sie jeweils alle oberen und unteren Schranken sowie Supremum und Infimum der Teilmengen $S = \{2, 3, 4\}$ und $T = \{4, 6, 10\}$.
4. Bestimmen Sie die induzierten Ordnungen $(S, \leq_S)$ $(T, \leq_T)$.

Aufgabe 4. 3. Es sei $(A, \leq)$ eine geordnete Menge. Zeigen Sie:

> $\leq$ ist eine Wohlordnng auf A genau dann, wenn $(A, \leq)$ eine Kette ist, in der es keine unendlich strikt absteigenden Folgen $a_1 > a_2 > \cdots$ gibt.[1]

Aufgabe 4. 4. Betrachten Sie die lexikographische Ordnung auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2) :\iff a_1 < b_1 \vee (a_1 = b_1 \wedge a_2 \leq b_2)$$

1. Zeigen Sie, daß $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq)$ wohlgeordnet ist.
2. Geben Sie eine unendlich aufsteigende Kette in $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq)$ an.

Aufgabe 4. 5. Eine Tautologie der Gestalt '$A \iff B$' kann verwendet werden, um eine Aussage äquivalent umzuformen, das heißt, in eine andere Aussage mit gleicher Wahrheitswertetabelle zu verwandeln. So erlaubt die Tautologie '$\neg\neg A \iff A$' beispielsweise, doppelte Verneinungen zu eliminieren. In dieser Aufgabe nennen wir eine Aussage in **elementarer Darstellung**, wenn in ihr die Konnektive '$\iff$' und '$\Rightarrow$' nicht vorkommen und Negationen ausschließlich auf Aussagenvariable (Grundaussagen) wirken. Die Formel

$$[(\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_1 \vee p_3)] \vee p_1$$

ist z.B. elementar dargestellt.

Verwenden Sie die Tautologien

$$\begin{aligned}
(A \iff B) &\iff [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)] \\
(A \Rightarrow B) &\iff (\neg A \vee B) \\
\neg(A \vee B) &\iff \neg A \wedge \neg B \\
\neg(A \wedge B) &\iff \neg A \vee \neg B
\end{aligned}$$

dazu, die folgenden Aussagen in äquivalente Aussagen in Elementardarstellung zu bringen.

[1] Das bedeutet, jede strikt absteigende Folge muß notwendig endlich sein.

1. $p_1 \iff \neg(p_1 \vee \neg p_2)$
2. $\neg\{\neg[p_1 \wedge \neg(p_2 \iff p_1)] \wedge \neg(\neg p_1 \Rightarrow p_2)\}$
3. $(p_1 \Rightarrow (p_2 \Rightarrow p_3)) \Rightarrow ((p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow (p_1 \Rightarrow p_3))$

Aufgabe 4. 6. Bringen Sie die folgenden Aussagen jeweils in konjuktive Normalform.

$$\begin{array}{l} p_1 \Rightarrow \neg(p_2 \Rightarrow \neg p_3) \\ (\neg p_1 \Rightarrow \neg p_2) \Rightarrow (p_2 \Rightarrow \neg p_1) \\ p_1 \Rightarrow (p_2 \Rightarrow p_1) \\ \neg(p_1 \vee \neg p_1) \end{array}$$

Anleitung: Eine **Konjunktion** ist eine 'Und-Verknüpfung', also eine Aussage des Typs $A \wedge B$, während eine 'Oder-Verknüpfung' $A \vee B$ als **Disjunktion** bezeichnet wird. Eine aus Grundaussagen $p_1, \ldots, p_n$ gebildete Aussage ist in **konjunktiver Normalform**, wenn sie eine Konjunktion aus (möglicherweise mehreren) Teilaussagen ist, die jeweils als Disjunktion aus den $p_1, \ldots, p_n$ oder deren Negationen geschrieben sind. Zum Beispiel ist die Aussage $(p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2)$ in konjunktiver Normalform, aber auch $p_2 \vee p_3$, $p_1 \wedge p_2$ und $p_2 \vee \neg p_2$. Die Aussagen $(p_1 \wedge p_2) \vee p_1$ sowie $p_1 \Rightarrow p_2$ sind nicht in konjunktiver Normalform. Ein elementares Theorem der Aussagenlogik besagt:

> Zu jeder Aussage gibt es eine logisch äquivalente Aussage in konjunktiver Normalform.

Um eine konjunktive Normalform A_{KN} aus einer Aussage A herzustellen, können Sie A entweder äquivalent in A_{KN} umformen, oder die Wahrheitstabelle von A direkt verwenden.

Aufgabe 4. 7. Verwenden Sie die logisch gültigen Formeln

$$\neg\forall x\ A \iff \exists x\ \neg A \qquad \neg\exists x\ A \iff \forall x\ \neg A$$

um die folgenden Aussagen zu verneinen.[2]

1. $\forall x\ ((\forall y < x\colon y \in a) \Rightarrow x \in a) \Rightarrow \forall x\colon x \in a$
2. $\forall x\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y\ (|y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon)$

Aufgabe 4. 8. Wie Aufgabe 4.7 für die folgenden Aussagen.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y\ (|y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon)$$
$$\exists a\ [\forall x\ (x \in a \Rightarrow \exists y, z\colon x = f(y, z)) \wedge \forall x, y, z\ (f(x, y) \in a \wedge f(x, z) \in a \Rightarrow y = z))]$$

[2] Analog zur '**elementaren Darstellung**' in der Aussagenlogik ist eine Formel gesucht, in der Negationen nur auf Grundaussagen wirken.