auszuarbeiten bis 24. November

Aufgabe 5. 1. Beweisen Sie, daß jede zyklische Gruppe abelsch ist.

Aufgabe 5. 2.

1. Zeigen Sie, daß die additiven Gruppen der Restklassenringe $(Z_n, +, \cdot)$ zyklische Gruppen sind.

2. Bestimmen Sie alle erzeugenden Elemente der Gruppen Z_7 und Z_8,

Aufgabe 5. 3. Es seien $(G_1, \circ_1)$ und $(G_2, \circ_2)$ Gruppen. Zeigen Sie, daß durch die Festsetzung

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 \circ_1 b_1, a_2 \circ_2 b_2)$$

das kartesische Produkt $G_1 \times G_2$ zu einer Gruppe wird.

Aufgabe 5. 4. e_1, e_2 mögen die neutralen Elemente in G_1 bzw. G_2 bezeichnen.

1. Zeigen Sie, daß $G_1 \times \{e_2\}$ und $\{e_1\} \times G_2$ jeweils normale Untergruppen von $G_1 \times G_2$ sind.

2. Beweisen Sie: $G_1 \cong G_1 \times \{e_2\}$ und $G_2 \cong \{e_1\} \times G_2$.

Aufgabe 5. 5. Es sei G eine Gruppe, und $\mathrm{Aut}(G)$ die Menge aller Automorphismen von G. Zeigen Sie, daß $\mathrm{Aut}(G)$ mit der Verknüpfung von Abbildungen

$$(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x))$$

als Operation eine Gruppe bildet.

Aufgabe 5. 6. Gegeben sei die 3×3-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie eine 3×3-Matrix $B \neq 0$ so, daß $A \cdot B = 0_{3\times 3}$ gilt.

Aufgabe 5. 7. Zeigen Sie, daß die Menge der Einheiten $R^\times$ eines Rings R bezüglich der Multiplikation in R eine Gruppe bildet.