Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1 (WS 08/09)
6. Übungsblatt
(auszuarbeiten bis 1. Dezember 2008)

6.1 (Der Satz von Cantor-Schröder-Bernstein)

Zeigen Sie unter Verwendung des Satzes von Cantor-Schröder-Bernstein, dass $[0,1]$ und $[1,3]$ gleich viele Elemente enthalten.

6.2 (Untergruppen)

Bestimmen Sie alle Unterhalbgruppen von

- $(\mathbb{Z}_6, +)$
- $(\mathbb{Z}_7, +)$

6.3 (Gruppen und Untergruppen)

Wir betrachten die Gruppe $(\mathbb{Z}_3^2, +)$ und die Menge $H = \{(0,0), (1,2), (2,1)\}$.

Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen

- $(\mathbb{Z}_3^2, +)$ ist zyklisch.
- $(H, +) \leq (\mathbb{Z}_3^2, +)$.

6.4 (Gruppen und Untergruppen)

Wir betrachten die Gruppe $(\mathbb{Z}_3^2, +)$ und die Menge $H = \{(0,0), (1,2), (2,1)\}$.

- Zeigen oder widerlegen Sie: $(H, +)$ ist zyklisch.
- Bestimmen Sie die Menge der Linksnebenklassen von $\mathbb{Z}_3^2$ nach H bzgl. $+$.
- Bestimmen Sie die Menge der Rechtsnebenklassen von $\mathbb{Z}_3^2$ nach H bzgl. $+$.

6.5 (Polynomringe und Integritätsbereiche)

Zeigen oder widerlegen Sie:

$R[x]$ ist genau dann ein Integritätsbereich, wenn R ein Integritätsbereich ist.

6.6 (Formale Potenzreihen)

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement

Zeigen oder widerlegen Sie, dass $R[\![x]\!]$ mit den im Skript angegebenen Operationen einen kommutativen Ring mit Einselement bildet.

6.7 (Formale Potenzreihen und Integritätsbereiche)

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement.

Zeigen oder widerlegen Sie:

$R[\![x]\!]$ ist genau dann ein Integritätsbereich, wenn R ein Integritätsbereich ist.

6.8 (Einheiten formaler Potenzreihen)

Sei K ein Körper.

- Bestimmen Sie $K[\![x]\!]^*$.
- Berechnen Sie $(1-x)^{-1}$, sofern $(1-x) \in K[\![x]\!]^*$.

6.9 (Matrizenoperationen)

Berechnen Sie das Ergebnis folgender Operationen (sofern definiert)

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 4 & -7 & 6 \end{pmatrix}$