Übungen zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1, WS 08/09
8. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 12.1.2009

8.1. (Lineare Gleichungssysteme) Lösen Sie folgende linearen Gleichungssysteme durch Reduktion auf die Hermite-Form und geben Sie die Lösungsmenge des Systems an.

(a)

$$\begin{aligned} 4x - 2y + 2u - 3v &= 1 \\ -3x \phantom{{}- 2y} - 2u + v &= 0 \\ 2x + 3y - u + 2v &= 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} u + v &= w \\ 2w - 2x &= y \\ 2x - 3w &= 1 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1-i & 1+i & i \\ -i & 1 & 1-i \\ 1-i & 1 & 1-i \\ 1 & i & -1+2i \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$$

8.2. (Lineare Gleichungssysteme) Ein lineares Gleichungssystem $Ax = c$ habe die Lösungsmenge $L = \{x_0 + \lambda a + \mu b \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

(a) Welche Lösungsmenge hat dann $Ax = 0$?
(b) Kann $c = 0$ und $x_0 \neq 0$ sein?
(c) Kann $c \neq 0$ und $x_0 = 0$ sein?
(d) Kann es ein d geben, sodass $Ax = d$ die leere Lösungsmenge hat?

8.3 (Projektiver Raum)

(a) Gegeben seien die Geraden g: $x + 2y = 1$ und h: $2x + 4y = 4$
Berechnen Sie **im projektiven Raum** die Schnittmenge der beiden Geraden.
Wie lässt sich das Ergebnis geometrisch interpretieren?

(b) Wie (a) für g: $x + y = 3$ und h: $2x - y = 0$

8.4 (Projektiver Raum)

(a) Zeigen Sie :
Seien g : ax + by = c und h : dx + ey = f zwei Geraden im $\mathbb{R}^2$.
und sei $(v_1, v_2, v_3) = (a,b,-c) \times (d,e,-f)$
("x" bezeichne das gewöhnliche Kreuzprodukt zweier Vektoren im $\mathbb{R}^3$, also
$(a,b,c) \times (u,v,w) := (bw-cv,-aw+cu,av-bu)$)
Dann gilt :
Ist $v_3 = 0$, so sind die Geraden parallel mit Richtungsvektor (v_1,v_2)
Ist $v_3 \neq 0$, so ist der Schnittpunkt gegeben durch $(v_1/v_3, v_2/v_3)$

(b) Lösen Sie Übung 8.3 mit Hilfe der Methode aus (a).

8.5. (Lineare Abhängigkeit) Sei $M = \{ (1,0,2), (2,1,1), (5,2,0), (2,0,4) \} \subseteq \mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$.
Bestimmen Sie alle linear unabhängigen Teilmengen von M.

8.6 (Matrizen) Zeigen Sie das Korollar zu Satz 4.8 aus dem Skript :
Für $m \in \mathbb{N}$ und reguläre Matrizen A gilt : $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$.

8.7 (Mehrdimensionales Newtonverfahren)
Sei $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x^2y - y - 1 \\ 2x + y + 1 \end{pmatrix}$

Finden Sie eine Nullstelle von f analog zu Beispiel 4.12 aus dem Skript.

8.8. (Vektorräume) Zeigen Sie : In einem Vektorraum V über einem Körper K gilt für $a, b, c \in V$ und $\lambda \in K$:
(a) $a + c = b + c \Rightarrow a = b$
(b) Jedes a in V hat **genau ein** inverses Element.
(c) $-(-a) = a$
(d) $(-\lambda)(-a) = \lambda a$
(Achtung! Nichttriviale Beweise! Geben Sie bei jedem Beweisschritt den verwendeten Teil von Satz 5.6 bzw. das verwendete Vektorraumaxiom an.)

8.9 (Vektorräume)

(a) Sei M eine beliebige aber feste Menge. Ist $V = (P(M), \Delta)$ über $\mathbb{Z}_2$ mit der Skalarmultiplikation $[1]\cdot A = A$ und $[0]\cdot A = \{\}$ ein Vektorraum? Geben Sie in jedem Fall an, welche VR-Axiome erfüllt sind.

(b) Ist $V = \{ a + b\sqrt{3}, \mid a, b \in \mathbb{Q} \}$ mit der „gewöhnlichen" Skalarmultiplikation ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$? Wie sieht es über $\mathbb{R}$ aus?

8.10 (Unterräume)

(a) Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind Unterräume? (jeweils über K=$\mathbb{R}$.)

(i) $\{(0,0,\dots,0,x_n) \mid x_n \in \mathbb{R}\}$

(ii) $\{(x, x, \dots, x) \mid, x \in \mathbb{R}\}$

(iii) $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid, \sum x_i^2 = 0, x_i \in \mathbb{R}\}$

(iv) $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \sum x_i = 1, x_i \in \mathbb{R}\}$

(v) $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \sum x_i = 0, x_i \in \mathbb{R}\}$

(b) Sei V der Vektorraum aus Übung 8.9.(a) mit M=$\mathbb{N}$. Bilden die endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ einen Unterraum von V? Bilden die **un**endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ einen Unterraum von V?