Übungen zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1, WS 08/09
9. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 19.1.2009

9.1. (Basis) Welche der folgenden Mengen bilden Basen der jeweiligen Vektorräume? Falls es sich um keine Basis handelt, ergänzen bzw. reduzieren Sie – falls möglich – jeweils zu einer Basis. Falls nicht möglich, geben Sie eine beliebige Basis an.

(a) $V = \mathbb{R}^3$ und $B = \{ (1,2,-3),(0,0,1),(0,1,0),(-3,1,2) \}$

(b) $V = Pol_3(\mathbb{R})$ und $B = \{ 1+x, x+x^2, 1+x+x^2, 1+x^3 \}$

(c) V = der Vektorraum aus Übung 8.9a mit $M=\{1,2,3\}$ und $B=\{1,2,3\}$.

(d) $V = (\mathbb{Z}_3)_2^2$, also die 2x2 Matrizen über $\mathbb{Z}_3$ und $B = \{ \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} \}$

9.2. (Basis) Zeigen oder widerlegen Sie : $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ besitzt eine abzählbare Basis. Falls ja, finden Sie eine solche.

9.3. (Basis und Dimension)

(a) Sei $V = Pol_2(\mathbb{R}))$ und sei $U \leq V$ mit $U = \{ p \mid \int_0^1 p(x)dx = 0 \}$
Bestimmen Sie eine Basis von U sowie die Dimension von U.

(b) Sei $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to x^{i-1}e^x$ und sei $V = span(f_1,f_2,f_3)$
Zeigen oder widerlegen Sie: $B=\{f_1,f_2,f_3\}$ ist eine Basis von V.

9.4. (Faktorraum)

Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $U = \{ (x,y,z) \in V \mid 2x - y + z = 0 \} \leq V$. (D.h. ein Unterraum von V).

(a) Bestimmen Sie so genau als möglich (d.h. durch Angabe aller äquivalenten Elemente) die Äquivalenzklassen von (0,0,0) und von (1,0,-1) und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch im Zusammenhang mit V und U.

(b) Bestimmen Sie den Faktorraum $V/_U$. (Begründen Sie die Lösung ausführlich!)

(c) Finden Sie ein Repräsentantensystem.

9.5. (Faktorraum)

Sei $V = C([0,1])$ (also der Vektorraum der im Intervall [0,1] stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$) und sei $U = \{ f \in C([0,1]) \mid f(1) = 0 \} \leq V$.

(a) Seien $f(x) = x$ und $g(x) = x^2$. Bestimmen Sie $f + U$ und $g + U$.

(b) Bestimmen Sie den Faktorraum $V/_U$.

(c) Finden Sie ein Repräsentantensystem.

9.6. (Existenz einer Basis)

Wir betrachten folgende Variante von Satz 5.24 aus dem Skript:
Sei V ein **endlichdimensionaler** Vektorraum und $M \subseteq V$ mit $L(M)=V$.
Zeigen Sie: Es gibt eine Menge $B \subseteq M$, sodass B eine Basis von V ist.

Hinweis: Der Beweis verlangt das Zorn'sche Lemma, und zwar:
„Falls jede Kette in einer geordneten Menge A eine obere Schranke in A hat, so besitzt A mindestens ein maximales Element."
Satz 5.24 selbst und spätere Sätze dürfen nicht verwendet werden!

9.7. (Summe von Unterräumen) Wir zeigen eine Verallgemeinerung von Satz 5.39:
Seien U und W endlichdimensionale Unterräume von V, so gilt:
$\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim(U)+\dim(W)$ (die Summe ist NICHT notwendigerweise direkt!)

9.8. (Summe von Unterräumen) Seien $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{ (x,y,x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ und
$W =\{ (x,x,y,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

(a) Bestimmen Sie U+W, eine Basis von U+W und dim(U+W).

(b) Bestimmen sie $U \cap W$, $\dim(U \cap W)$, dim(U), dim(W) und vergleichen sie Ihr Ergebnis mit Übung 9.7.

(c) Ist die Summe U+W direkt?