

Übungsblatt 1

<http://www.risc.uni-linz.ac.at/education/courses/ws2008/mathematik1>

Besprechung am 16.10.2008.

Aufgabe 1 Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen:

- $1 < |x - 2| < 2, \quad x \in \mathbb{R},$
- $(x - 1)(x - 2)(x - 3)^2 \leq 0, \quad x \in \mathbb{R},$
- $\sqrt{xy} < \frac{1}{2}(x + y), \quad x, y \in [0, \infty),$
- $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x} - 1 \leq x + 1, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}.$

Aufgabe 2 Wir haben gesehen, daß sich jede reelle Zahl als (unendlicher) Dezimalbruch schreiben läßt. Allgemeiner kann man zu jeder Zahl $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ die sogenannte b -adische Darstellung

$$\pm d_0.d_1d_2d_3\dots := \pm \left(d_0 + \frac{d_1}{b} + \frac{d_2}{b^2} + \frac{d_3}{b^3} + \dots \right)$$

einer reellen Zahl definieren, wobei $d_0 \in \mathbb{N}_0$ und $d_k \in \{0, 1, 2, \dots, b - 1\}$, $k \in \mathbb{N}$, gelten soll. Für $b = 10$ bekommt man also insbesondere wieder die übliche Dezimaldarstellung.

- Gibt es zu jeder rationalen Zahl x ein $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, so daß eine b -adische Darstellung von x nur endlich viele Ziffern $d_k \neq 0$ enthält?
- Ist die b -adische Darstellung einer rationalen Zahl für jedes $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ von einer gewissen Stelle an periodisch?
- Ist umgekehrt jede reelle Zahl x , für die ein $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ existiert, so daß die b -adische Darstellung von x von einer gewissen Stelle an periodisch ist, rational?

Aufgabe 3 Zeigen Sie, daß die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl entweder wieder eine natürliche oder eine irrationale Zahl ist. Gilt diese Aussage auch für die Kubikwurzel einer natürlichen Zahl?

Aufgabe 4 Seien x und y zwei positive, reelle Zahlen mit $x \neq y$. Wir wollen sie als Maschinenzahlen speichern und runden sie daher auf Zahlen \bar{x} und \bar{y} mit relativem Fehler $\frac{|\bar{x}-x|}{x} < \varepsilon$ beziehungsweise $\frac{|\bar{y}-y|}{y} < \varepsilon$. Wie groß kann dann der relative Fehler

- der Summe $\bar{x} + \bar{y}$,
- der Differenz $\bar{x} - \bar{y}$,
- des Produkts $\bar{x}\bar{y}$,
- des Quotienten $\frac{\bar{x}}{\bar{y}}$

werden (verglichen mit den exakten Werten $x + y$, $x - y$, xy beziehungsweise $\frac{x}{y}$)?

Aufgabe 5 Verschaffen Sie sich Zugang zu einer lauffähigen Installation des Computeralgebrasystems Sage (<http://www.sagemath.org>). Machen Sie sich mit der Benutzeroberfläche, der Dokumentation und der Syntax von Sage vertraut.