

# Übungsblatt 10

Besprechung am **18.12.2008**.

---

**Aufgabe 1** Berechnen Sie näherungsweise  $\int_0^1 \sin(x^2) dx$ , indem Sie den Integranden durch sein Taylorpolynom vom Grad 14 ersetzen.

*Zusatzfrage:* Kann man dieses Integral auch exakt ausrechnen?

**Aufgabe 2** Bestimmen Sie allgemein den  $n$ -ten Koeffizienten  $f_n$  der Taylorreihe  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$  für folgende Funktionen:

$$f_1(x) = \frac{1}{x+1}, \quad f_2(x) = \log(x+1), \quad f_3(x) = \frac{1}{x^2+1}, \quad f_4(x) = \arctan(x).$$

*Beispiel:* Für  $f(x) = e^x$  ist  $f_n = 1/n!$ .

**Aufgabe 3** Weihnachten ist bald vorbei und es ist höchste Zeit, sich an die Ostervorbereitungen zu machen. In der Mathematik wollen wir uns daher mit dem Ei beschäftigen: Berechnen Sie das Volumen des Eis, dessen Form von der Eikurve

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 1 - c^4$$

beschrieben wird. Wählen Sie für den Parameter  $c = \frac{51}{50}$ .

Begeben Sie sich anschließend zum Kühlschrank, messen Sie die Länge eines Hühnereis nach und passen Sie Ihr Resultat an die wahren Größenverhältnisse an!

*Hinweis:* Die Ableitung der Funktion "Areasinus Hyperbolicus" ist  $\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ .

**Aufgabe 4** Die Intensitätsverteilung  $a(x)$  des Lichts in einem Regenbogen wird durch die folgende Differentialgleichung charakterisiert:

$$a''(x) = x \cdot a(x).$$

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Gleichung die Taylorreihe der Funktion  $a(x)$  im Entwicklungspunkt  $x = 0$ . Tun Sie dies für generische Startwerte  $a(0) = a_0$  und  $a'(0) = a_1$ .

**Aufgabe 5** Programmieren Sie in Sage die numerische Integration mittels Taylorentwicklung im Nullpunkt (siehe Aufgabe 1). Gegeben sind eine Funktion, ein Intervall und die Anzahl der Terme in der Taylorentwicklung.

Testen Sie das Verfahren an den Integralen

$$\int_0^1 x^2 dx, \quad \int_0^{10\pi} \sin(x) dx,$$

sowie an dem Integral aus Aufgabe 3.

*Ihre Lösung zu dieser Aufgabe schicken Sie bitte bis zum 17.12.2008 per E-Mail an Ihren Übungsleiter oder Ihre Übungsleiterin.*