Übungsblatt 11

Besprechung am **15.01.2009**.

Aufgabe 1 Berechnen Sie folgende Grenzwerte mittels Taylorentwicklung:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x - x^2}{2\cos x - 2 + x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{\sin^2 x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2\big(\log(1-2x)\big)^2}{1-\cos(x^2)}.$$

Aufgabe 2 Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Funktionen

$$f(x,y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right), \quad g(x,y) = \log\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Aufgabe 3 Ein Weinfass habe die Höhe h, am Boden und am Deckel den Umfang u und in der Mitte den Umfang U. Nach der Keplerschen Fassregel ist das Volumen des Fasses ungefähr

$$\frac{h}{12\pi}(u^2 + 2U^2).$$

Rechtfertigen Sie diese Näherung, indem Sie die sogenannte Simpsonregel

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) \tag{1}$$

als allgemeine Näherungsformel für bestimmte Integrale auf einen geeigneten Rotationskörper anwenden.

Aufgabe 4 Beweisen Sie die Formel

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

indem Sie in die Reihe der Exponentialfunktion

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

für x den Wert $i\varphi$ einsetzen und Real- und Imaginärteil trennen.

Aufgabe 5 Schreiben Sie eine Funktion in Sage, die das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

einer Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ numerisch mithilfe der Simpsonregel approximiert. Zerlegen Sie dazu das Intervall $[a,b]$ in N gleich große Intervalle und verwenden Sie auf jedem Teilintervall die Simpsonregel (1). Testen Sie Ihre Funktion mit einigen Beispielen und vergleichen Sie die Approximation mit dem exakten Ergebnis. Versuchen Sie insbesondere einige Polynomfunktionen.

Ihre Lösung zu dieser Aufgabe schicken Sie bitte bis zum 14.01.2009 per E-Mail an Ihren Übungsleiter oder Ihre Übungsleiterin.