Analysis **Wintersemester 2008**
http://www.risc.uni-linz.ac.at/education/courses/ws2008/mathematik1/

Übungsblatt 3

Besprechung am **30.10.2008**

Aufgabe 1 Verifizieren Sie, dass die Folge $a_n = n^2/(1+n^2)$ gegen 1 konvergiert, indem Sie zu gegebenem $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ angeben, sodass $|a_n - 1| < \epsilon$ ist für alle $n > N(\epsilon)$.

Aufgabe 2 Untersuchen Sie, ob folgende Folgen konvergieren oder nicht, und geben Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert an:

$$a_n = -2n + \frac{1}{n}, \qquad b_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n}, \qquad c_n = \left(-\frac{1}{n}\right)^n,$$
$$d_n = n - \frac{n^2+4n+2}{n}, \qquad e_n = \cos(n\pi), \qquad f_n = 1/2\,(\pi^n + \pi^{-n}).$$

Aufgabe 3 Reihen.

a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen mit Hilfe des Majoranten/Minoranten-Kriteriums auf Konvergenz:
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.$$

b) Zeigen Sie, dass die Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$
konvergiert.

Aufgabe 4 Beweisen Sie, dass

a) die Potenzfunktionen $x \mapsto x^n$ für $n \in \mathbb{N}$ stetig sind,

b) die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ stetig ist.

Aufgabe 5 Eine Möglichkeit, eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ im Rechner darzustellen, ist die Angabe eines Intervalls $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ $(b \geq a)$ und $x \in [a, b]$. Je kleiner dabei die Länge $\varepsilon := b - a$ des Intervalls ist, desto genauer ist x beschrieben.

Schreiben Sie eine Funktion in Sage, die zu gegebenen $c \in \mathbb{Q}$ mit $c > 0$ und $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ mit $\varepsilon > 0$ zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $0 \leq b - a \leq \varepsilon$ und $\sqrt[3]{c} \in [a, b]$ berechnet. (Als arithmetische Operationen sind dabei nur die Grundrechenarten zu verwenden.)

Ihre Lösung zu dieser Aufgabe schicken Sie bitte bis zum 29.10.2008 per eMail an Ihre(n) ÜbungsleiterIn.