Mathematik 1 (Analysis) **Wintersemester 2008**
http://www.risc.uni-linz.ac.at/education/courses/ws2008/mathematik1/

Übungsblatt 6

Besprechung am **20.11.2008**.

Aufgabe 1 Approximation

a) Berechnen Sie Näherungen an $\sqrt[3]{100}$, indem Sie die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x}$ bei $x = 125$ zum einen durch ihre lineare Approximation (d.h. die Tangente), zum anderen durch eine Parabel ersetzen. Die Parabel sollte so gewählt werden, dass auch die zweite Ableitung im Punkt $x = 125$ übereinstimmt. Wie genau sind Ihre Resultate?

b) Geben Sie eine mathematische Begründung für die gängige Praxis, $\sin(x)$ für x nahe bei 0 durch x anzunähern! Wie gut ist diese Näherung für $x = \frac{1}{100}$?

Aufgabe 2 Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin(x))^2 - x^2}{\cos(2x) - 4\cos(x) + 3}$$

mit Hilfe der Regel von l'Hôpital (s. Aufgabe 4)!

Aufgabe 3 Zwischenwertsatz und Mittelwertsatz im Praxistest

a) Nach einer anstrengenden Radtour lesen Sie am Tacho Ihre Durchschnittsgeschwindigkeit ab. Muss es notwendigerweise während dieser Tour einen Zeitpunkt gegeben haben, an dem Sie exakt mit dieser Geschwindigkeit gefahren sind?

b) Können Sie einen quadratischen vierbeinigen Tisch auf unebenem Boden immer allein durch Drehung um seinen Mittelpunkt in eine wackelfreie Position bringen? Sie dürfen annehmen, dass der Boden stetig ist.

Aufgabe 4 Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen.

a) Zeigen Sie, dass für ein beliebiges Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ die Ableitung der Funktion $h_{(a,b)} : (a, b) \to \mathbb{R}$,

$$h_{(a,b)}(y) = (f(b) - f(a))(g(y) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(y) - f(a))$$

eine Nullstelle im Intervall (a, b) besitzt.

Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz.

b) Folgern Sie daraus die Regel von l'Hôpital: Gilt $f(0) = g(0) = 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dann gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

sofern der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

Hinweis: Benutzen Sie das Resultat aus (a) auf dem Intervall $(0, x)$, falls $x > 0$ ist, beziehungsweise auf $(x, 0)$, falls $x < 0$ ist.

Bemerkung: Der Einfachheit halber handelt es sich hier um einen Spezialfall. Im Allgemeinen kann ein Limes $x \to c$, $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ betrachtet werden. Die Funktionen f und g können auch beide gegen $\pm\infty$ gehen für $x \to c$. Und $g'(x) \neq 0$ muss lediglich für $x \in (a, b) \setminus \{c\}$, $a \leq c \leq b, a \neq b$ gelten.

Aufgabe 5 Implementieren Sie eine Funktion in Sage, die einen gegebenen Ausdruck symbolisch differenziert, indem Sie die in der Vorlesung behandelten Differentiationsregeln (Produktregel, Kettenregel, etc.) verwenden. Erlaubt sind wieder einmal nur die Grundrechenarten; insbesondere dürfen Sie natürlich nicht die in Sage bereits vorhandene Funktion `derivative` o.ä. zu Hilfe nehmen! Ihre Funktion sollte in der Lage sein, beliebig verschachtelte Ausdrücke mit Wurzeln, Potenzen, Logarithmen, Sinus und Cosinus abzuleiten. Zum Testen mögen Sie die Funktionen aus Aufgabe 1 von Übungsblatt 5 heranziehen.

Hinweise: Mit `type(f)` können Sie den Typ eines symbolischen Ausdrucks `f` abfragen. Falls `f` vom Typ `sage.calculus.calculus.SymbolicArithmetic` ist, können Sie mittels `f._operator` erfahren, welcher Art der arithmetische Ausdruck ist (Summe, Produkt, usw.):

```
from operator import add, sub, neg, mul, div, pow
if f._operator is add:
    ...
```

Mit `f._operands` haben Sie Zugriff auf die Operanden.

Ihre Lösung zu dieser Aufgabe schicken Sie bitte bis zum 19.11.2008 per E-Mail an Ihren Übungsleiter oder Ihre Übungsleiterin.