Mathematik 1 (Analysis) **Wintersemester 2008**
http://www.risc.uni-linz.ac.at/education/courses/ws2008/mathematik1/

Übungsblatt 7

Besprechung am **27.11.2008**.

Aufgabe 1 Ermitteln Sie die Proportionen eines Zylinders, der bei gegebenem Volumen V die kleinste Oberfläche F besitzt.

Aufgabe 2 Um das Kryptosystem RSA zu knacken, müssen sehr große Zahlen faktorisiert werden. Die Tabelle enthält Daten eines Experiments, bei dem relativ (!) kleine Zahlen faktorisiert wurden: x_i ist die Anzahl der Dezimalstellen und t_i die dafür benötigte Rechenzeit in Sekunden.

x_i	41	43	46	47	50	52	54	56
t_i	0.7	1.3	3.9	5.2	18.1	26.8	36.7	68.2
$y_i = \log(t_i)$	-0.34	0.28	1.36	1.64	2.89	3.29	3.60	4.22

Der lineare Zusammenhang zwischen x_i und y_i soll mittels linearer Regression modelliert werden. Verwenden Sie dazu, dass die allgemeine Regressionsgerade $y = kx + d$ immer durch den Schwerpunkt $(\frac{1}{n}\sum_i x_i, \frac{1}{n}\sum_i y_i)$ verläuft. Verschieben Sie die Daten entsprechend und berechnen Sie mit der Formel (1) aus Aufgabe 3 die Steigung der Regressionsgerade durch den Ursprung. Nutzen Sie diese, um abzuschätzen, wie lange der Computer des Experiments brauchen würde, um einen der heute üblichen 4096-Bit-Schlüssel (also eine Binärzahl mit 4096 Stellen – wie viele Dezimalstellen sind das?) zu knacken.

Aufgabe 3 In dieser Aufgabe wollen wir die Steigung der Regressionsgerade ("besten Gerade") durch den Ursprung $y = kx$ an eine gegebene Punktwolke (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$ bestimmen. Dazu minimieren wir die Summe der Quadrate der Abweichungen $(y_i - kx_i)^2$ der Messwerte y_i von der Geraden. Wir suchen also jenes k, das die Summe der Fehlerquadrate

$$f(k) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - kx_i)^2$$

minimiert. Zeigen Sie, dass die Steigung der Regressionsgeraden

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \tag{1}$$

ist, d.h. dass die Funktion $f(k)$ an dieser ein Stelle ein globales Minimum hat.

Aufgabe 4 Implementieren Sie das Newton-Verfahren in Sage und testen Sie es:

a) Finden Sie die reellen Nullstellen der Funktion $f(x) = x^5 - 4x - 1$.

b) Versuchen Sie mit Ihrem Programm, die einzige Nullstelle der (stetigen und differenzierbaren!) Funktion $f(x) = e^{-1/x^2}$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ zu approximieren. Warum gelingt dies nicht (bzw. nur sehr schlecht)?

c) Finden Sie ein Beispiel, in dem das Newton-Verfahren oszilliert, das nicht in der Vorlesung besprochen wurde.

Ihre Lösung zu dieser Aufgabe schicken Sie bitte bis zum 26.11.2008 per E-Mail an Ihren Übungsleiter oder Ihre Übungsleiterin.