Übungsblatt 8

Besprechung am **04.12.2008**

Aufgabe 1 Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale!

a) $\int x^3 e^{x^2} \mathrm{d}x$ b) $\int x^2 \arctan(x) \mathrm{d}x$ c) $\int \arcsin(3x) \mathrm{d}x$ d) $\int \cos\left(\sqrt[3]{2x+3}\right) \mathrm{d}x$

Aufgabe 2 Wie groß ist die Fläche, die von
a) den Graphen der Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = 8\sqrt{x}$, bzw.
b) den drei Geraden $x + y = 2$, $x - y = -1$ und $x + 2y = 2$
eingeschlossen wird?

Aufgabe 3 Berechnen Sie

$$\int \frac{x^2 + 3x + 8}{(x^2 - 1)(x^2 + 2)} \mathrm{d}x,$$

indem Sie zunächst reelle Zahlen a, b, c, d bestimmen, so dass

$$\frac{x^2 + 3x + 8}{(x^2 - 1)(x^2 + 2)} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{(x + 1)} + \frac{cx + d}{x^2 + 2}$$

die Partialbruchzerlegung des Integranden ist. Integrieren Sie dann termweise!

Aufgabe 4 Begründen Sie bitte, warum die Ihnen schon von Übungsblatt 4 bekannte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{wenn } x = \frac{p}{q} \quad \text{mit } p, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

nicht Riemann-integrierbar ist, mithin das Riemannintegral $\int_0^1 f(x) \mathrm{d}x$ nicht existiert. Verwenden Sie die Definition des bestimmten Integrals!

Aufgabe 5 Das Newtonverfahren in $\mathbb{C}$.
Wie bei reellen Funktionen ist die komplexe Ableitung einer Polynomfunktion

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto z^m + z^{m-1} + \cdots + 1$$

die komplexe Funktion $f'(z) = mz^{m-1} + (m - 1)z^{m-2} + \cdots + 1$ definiert für alle $z \in \mathbb{C}$.
Mit einem gegebenen Startpunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ kann das Newtonverfahren in $\mathbb{C}$ wie im Reellen ausgeführt werden durch sukzessive Iteration:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Schreiben Sie eine Sage-Funktion `plot_newtonCC((xmin,xmax),(ymin,ymax),g,n)`, die Startpunkte aus der Region $[xmin, xmax] \times [ymin, ymax]$ der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ bezüglich ihrer Konvergenz nach `n` Iterationen zu einer der drei Wurzeln der Funktion $f(z) = z^3 - 1$ einteilt. Wählen Sie dafür ein Gitter von `g`×`g` Punkten aus der Region und visualisieren Sie die drei Punktmengen mit verschiedenen Farben!

Ihre Lösung zu dieser Aufgabe schicken Sie bitte bis zum 03.12.2008 per E-Mail an Ihren Übungsleiter oder Ihre Übungsleiterin.