Übungsblatt 9

http://www.risc.uni-linz.ac.at/education/courses/ws2008/mathematik1

Besprechung am **11.12.2008.**

Aufgabe 1 Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n^2 - k^2},$$

indem Sie die Folgenglieder als Riemannsumme auffassen.

Aufgabe 2 Bestimmen Sie, für welche γ bzw. n die folgenden uneigentlichen Integrale existieren, und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert:

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\gamma}\,\mathrm{d}x := \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^\gamma}\,\mathrm{d}x, \quad \gamma \in \mathbb{R},$

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{|x|^\gamma}\,\mathrm{d}x := \lim_{b\to 0-} \int_{-1}^b \frac{1}{|x|^\gamma}\,\mathrm{d}x + \lim_{a\to 0+} \int_a^1 \frac{1}{|x|^\gamma}\,\mathrm{d}x, \quad \gamma \in \mathbb{R},$

c) $\displaystyle\int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x := \lim_{b\to\infty} \int_0^b x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}_0.$

Aufgabe 3

a) Sei $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ eine monoton fallende Funktion. Beweisen Sie die Äquivalenz

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) < \infty \iff \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

b) Bestimmen Sie, ob die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\gamma}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4

a) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und $g : [a,b] \to [0,\infty)$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeigen Sie, daß ein $\xi \in (a,b)$ mit der Eigenschaft

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

existiert.

b) Geben Sie zwei stetige Funktionen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ an, so daß kein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

existiert.

Aufgabe 5 Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und auf (a, b) stetig differenzierbare Funktion.

a) Schreiben Sie ein Sage-Programm, das die Bogenlänge des Graphen $\{(x, f(x)) \mid x \in [a, b]\}$ von f approximiert, indem es ihn durch einen Streckenzug durch $N + 1$ Punkte auf dem Graphen ersetzt.

b) Schreiben Sie ein Sage-Programm, das das Integral

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, \mathrm{d}x$$

approximiert, indem es das Intervall $[a, b]$ in N gleich große Intervalle zerlegt und die Funktion $\sqrt{1 + (f')^2}$ in jedem dieser Teilintervalle durch eine konstante Funktion annähert.

c) Vergleichen Sie die beiden Resultate. Was bekommen Sie für die Bogenlängen der Graphen der Funktionen $f_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$, und $f_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = x \sin \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$ und $f_2(0) = 0$?