Dezimalzahlen

Definition. Eine endliche Dezimalzahl besteht aus
- einem Vorzeichen $+$, $-$, oder 0
- einer natürlichen Zahl d_0
- einer endlichen Folge von Ziffern $d_1, \ldots, d_l$ von 0 bis 9.

Die Länge l kann auch 0 sein.

Einschränkungen:
- $d_l \neq 0$
- Das Vorzeichen ist dann und nur dann 0, wenn $d_0 = l = 0$ ist.

Dezimalzahlen

Eine unendliche Dezimalzahl besteht aus
- einem Vorzeichen $+$, $-$, oder 0
- einer natürlichen Zahl d_0
- einer unendlichen Folge von Ziffern $d_1, d_2, d_3, \dots$ von 0 bis 9.

Einschränkungen:
- Die Folge endet nicht mit einer Serie von 9-Ziffern.
- Das Vorzeichen ist dann und nur dann 0, wenn $d_i = 0$ ist für alle i.

Reelle und Rationale Zahlen

Definition. Eine reelle Zahl ist eine unendliche Dezimalzahl.

Die rationalen Zahlen sind die gemischt periodischen Dezimalzahlen (dabei wird eine endliche Dezimalzahl, aufgefüllt mit Ziffern 0, ebenfalls als periodisch angesehen).

Die Ordnungsrelation

Definition. Es seien $+a_0.a_1a_2\ldots$ und $+b_0.b_1b_2\ldots$ zwei reelle Zahlen mit Vorzeichen $+$. Wir sagen $a < b$, wenn es ein ein i gibt, sodaß $a_j = b_j$ für alle $j < i$ und $a_i < b_i$ gilt.
Es seien $-a_0.a_1a_2\ldots$ und $-b_0.b_1b_2\ldots$ zwei reelle Zahlen mit Vorzeichen $+$. Wir sagen $a < b$, wenn es ein ein i gibt, sodaß $a_j = b_j$ für alle $j < i$ und $a_i > b_i$ gilt.
Falls a und b unterschiedliche Vorzeichen haben, entscheidet das Vorzeichen nach der Regel $- < 0 < +$.

Die Ordnungsrelation $<$ ist transitiv. Außerdem handelt es sich um eine totale Ordnung, d.h. für zwei Zahlen gilt genau eine der drei Fälle $a < b$, $a = b$, oder $b < a$.

Weitere Definitionen zur Ordnung

Man definiert:
$a > b$ heißt $b < a$
$a \leq b$ heißt $a < b$ oder $a = b$.
$a \geq b$ heißt $a > b$ oder $a = b$.

$[a, b] := \{x \mid a \leq x \leq b\}$
$(a, b] := \{x \mid a < x \leq b\}$
$[a, b) := \{x \mid a \leq x < b\}$
$(a, b) := \{x \mid a < x < b\}$
$(-\infty, b) := \{x \mid x < b\}$
$(-\infty, b] := \{x \mid x \leq b\}$
$(a, \infty) := \{x \mid a < x\}$
$[a, \infty) := \{x \mid a \leq x\}$

Fallstricke

In einer Übungsaufgabe ist eine bijektive Abbildung $f : [0,1] \to (0,1)$ anzugeben. Eine typische Lösung sieht so aus:

Es sei α die kleinste positive Zahl. Es sei β die größte Zahl kleiner als 1. Wir definieren

$$f(x) = \alpha + (\beta - \alpha)x$$

Wahr ist vielmehr: Es gibt keine kleinste positive Zahl (und auch keine größte Zahl kleiner als 1).

Fallstricke

Man kann beweisen, daß zwischen zwei verschiedenen nicht-rationalen Zahlen eine rationale Zahl liegt. Außerdem kann man auch beweisen, daß zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen eine nicht-rationale Zahl liegt.

Also wechseln rationale und nicht-rationale Zahlen einander ab. Es gibt daher gleich viele rationale wie nicht-rationale Zahlen.

Wahr ist vielmehr: Die Menge der nicht-rationalen Zahlen ist überabzählbar und damit mächtiger als die Menge der rationalen Zahlen, die "nur" abzählbar ist.

Arithmetische Operationen

Die genaue Definition der Operationen $+, \cdot : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $/ : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\}) \to \mathbb{R}$ mit Dezimalzahlen ist zwar möglich, aber umständlich. Die rechnerische Durchführung kann wohl vorausgesetzt werden. Es gelten eine Reihe von Regeln:

Kommutativgesetz: $a + b = b + a$, $ab = ba$
Assoziativgesetz: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(ab)c = a(bc)$
Neutrales Element: $a + 0 = a$, $1 \cdot a = a$
Distributivgesetz: $(a + b)c = ac + bc$
Division: $(a/b)b = a$, $(ab)/b = a$ falls $b \neq 0$
$a < b \Rightarrow a + c < b + c$
$a < b, c > 0 \Rightarrow ac < bc$
$a < b, c < 0 \Rightarrow ac > bc$

Darstellungen am Computer

Maschinenzahlen in einfacher Genauigkeit bestehen aus 32 bits, nämlich
1 Vorzeichenbit $v \in \{0, 1\}$
8 bits für den Exponent e, eine ganze Zahl in (-128,128)
23 bits für die Mantisse M, eine endliche Binärzahl in [1,2)
Die dargestellte Zahl ist $(-1)^v 2^e M$.

Maschinenzahlen in doppelter Genauigkeit verwenden 11 bits für den Exponent und 52 bits für die Mantisse.

Beim Rechnen mit Maschinenzahlen treten meistens Rundungsfehler auf und selten gröbere Fehler, etwa Überläufe oder Division durch eine Zahl die nur wegen Rundungsfehlern ungleich Null ist.

Funktionen

Wir untersuchen Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$, wobei D meist ein Intervall der Form $[a, b]$, $(a, b]$ etc. ist, oder $D = \mathbb{R}$. Viele solche Funktionen lassen sich aus der Ordungsrelation und aus den arithmetischen Operationen konstruieren:

$$\operatorname{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto= \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases},$$

$$|\_| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} -x & \text{falls } x < 0 \\ x & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

Funktionen

Lineare Funktionen sind Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Art

$$x \mapsto ax + b,$$

wobei a, b reelle Parameter sind. Quadratische Funktionen sind Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Art

$$x \mapsto ax^2 + bx + c,$$

mit drei reellen Parametern a, b, c.

Potenzfunktionen mit ganzem Exponent

Das sind Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für positives n bzw. $(\mathbb{R} - \{0\}) \to \mathbb{R}$ für positives n, die definiert sind durch

$$(\_)^0 : x \mapsto 1$$

$$(\_)^n : x \mapsto x^{n-1}x \text{ falls } n > 0$$
$$(\_)^n : x \mapsto x^{n+1}/x \text{ falls } n < 0$$

Es gelten die Regeln

$$(xy)^n = x^n y^n, x^{m+n} = x^m y^n, (x^m)^n = x^{mn}$$

Funktionen

Andere Funktionen lassen sich nicht durch aus den arithmetischen Relationen konstruieren, und die wir auch jetzt noch nicht genau definieren können. Dazu gehören Potenzfunktionen mit reellem Exponent α

$$(\_)^{\alpha} : (0, \infty) \to \mathbb{R},$$

die Exponentialfunktion

$$b^{-} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

wobei die Bases ein positiver reeller Parameter ist, und deren "Umkehrfunktion"

$$\log_b : (0, \infty) \to \mathbb{R}.$$

Exkurs über Umkehrfunktionen

Eigentlich ist die Exponentialfunktion nicht surjektiv und besitzt daher auch keine Umkehrfunktion. Bei einer injektiven Funktion $f : A \to B$ kann man aber den Bildbereich auf den Wertebereich $W = f(A)$ einschränken und hat dann Bijektivität, und es existiert eine eindeutige Umkehrfunktion $f^{-1} : W \to A$.

Regeln

Die Potenzregeln oben gelten auch für reelle Exponenten. Insbesondere ist die Potenzfunktion mit Exponent $1/\alpha$ Umkehrfunktion der Potenzfunktion mit Exponent α:

$$(x^\alpha)^{1/\alpha} = \sqrt[\alpha]{x^\alpha} = x \text{ falls } x > 0$$

$$\log_b(b^x) = x, b^{\log_b(x)} = x \text{ falls } x > 0$$
$$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y) \text{ falls } x, y > 0$$
$$\log_b(x^a) = a \log_b(x) \text{ falls } x > 0$$

Der natürliche Logarithmus

Es gilt die Regel

$$\log_c(x) = \log_b(x)/\log_b(c) \text{ falls } b, c, x > 0.$$

Daher reicht es, die Logarithmen zu einer fixen Basis zu kennen.
Die bevorzugte Basis ist

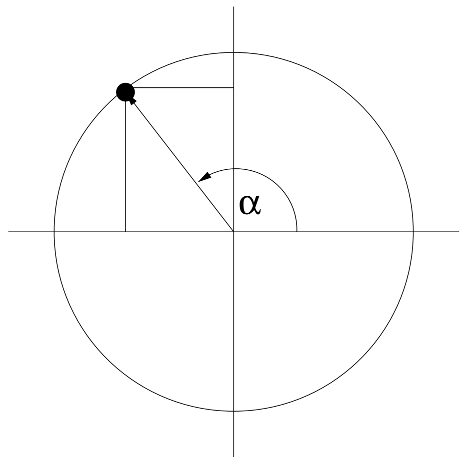
$$e = 2.718281828459045235 4\ldots$$

und man schreibt auch $\log(x)$ für $\log_e(x)$.

Winkelfunktionen

In der Analysis wird der Winkel im Bogenmaß angegeben, d.h. eine volle Umdrehung ist $2\pi = 6.28318530717958647700\ldots$.

Die Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind definiert als y- und x-Koordinate des Punktes mit Abstand 1 zum Nullpunkt in Abhängigkeit des Peilwinkels α:



Koordinaten des Punktes: $(\cos\alpha, \sin\alpha)$
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Winkelfunktionen

Die Tangens- und Kotangens-Funktion sind definiert durch

$$\tan(x) = \sin(x)/\cos(x), \; \cot(x) = \cos(x)/\sin(x)$$

für alle x bei denen der Nenner nicht Null ist. Insbesondere ist $\tan$ im Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ definiert.

Die Winkelfunktionen $\sin$ und $\cos$ sind periodisch mit Periode 2π:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x), \; \cos(x + 2\pi) = \cos(x).$$

Die Winkelfunktionen $\tan$ und $\cot$ sind periodisch mit Periode π:

$$\tan(x + \pi) = \tan(x), \; \cot(x + \pi) = \cot(x).$$

Zyklometrische Funktionen

Dies sind die “Umkehrfunktionen” von $\sin$, $\cos$, $\tan$, und $\cot$. Diese Winkelfunktionen sind nicht injektiv, drum muß man sie vorher einschränken auf ein geeignetes Intervall auf dem sie injektiv sind. Dieses Intervall wird dann zum Wertebereich der “Umkehrfunktionen”.

$$\arcsin : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad \text{Wertebereich } [-\pi/2, \pi/2]$$

$$\arccos : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad \text{Wertebereich } [0, \pi]$$

$$\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \text{Wertebereich } (-\pi/2, \pi/2)$$

$$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \text{Wertebereich } (0, \pi)$$

Komplexe Zahlen

Der komplexe Zahlenraum $\mathbb{C}$ ist ein zwei-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$, auf dem eine Multiplikation definiert ist durch

$$(a,b)\cdot(c,d) := (ac-bd, ad+bc).$$

Es gelten das Kommutativ-, Assoziativ-, und Distributivgesetz.

Das neutrale Element ist $(1,0)$. Der Unterraum bestehend aus den Zahlen der Form $(a,0)$ ist abgeschlossen bezüglich Addition und Multiplikation und wird mit $\mathbb{R}$ identifiziert, d.h. a entspricht $(a,0)$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Für jede komplexe Zahl (a,b)

$$(a,b) = (a,0) + (b,0)(0,1) = a + bi \text{ wobei } i := (0,1)$$

Betrag und Argument

Es sei $z = (a, b)$ eine komplexe Zahl. Dann heißt a Realteil von z, b Imaginärteil von z, und $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ Betrag von z. Der Betrag ist natürlich auch der Abstand des Punktes (a, b) vom Nullpunkt in der Koordinatenebene.

Falls $z \neq 0$, so heißt der Peilwinkel des Punktes Argument:

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan(b/a) & \text{falls } a > 0 \\ -\pi + \arctan(b/a) & \text{falls } a < 0, b < 0 \\ \pi + \arctan(b/a) & \text{falls } a < 0, b \geq 0 \\ \phi = \pi/2 & \text{falls } a = 0, b > 0 \\ \phi = -\pi/2 & \text{falls } a = 0, b < 0 \end{cases}$$

Division

Falls $z = a + bi$, so heißt $\overline{z} := a - bi$ die konjugierte Zahl, und es gilt $z\overline{z} = |z|^2$. Wenn $z \neq 0$ ist, gilt daher $z \cdot \frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1$, also $1/z = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$: man kann durch z dividieren.

Multiplikation in Polarkoordinaten

Es seien z_1 und z_2 komplexe Zahlen ungleich 0. Dann gilt

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \ |z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|,$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2), \ \arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2),$$

wobei auf der rechten Seite 2π addiert bzw. subtrahiert werden muss, wenn das Ergebnis nicht in $(-\pi, \pi]$ liegt.

Die komplexe Exponentialfunktion

Für $z = a + bi$ definieren wir

$$e^z := e^a(\cos(b) + i\sin(b)).$$

Die Regel $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ gilt auch im komplexen.

Eine “Umkehrfunktion” ist

$$z \mapsto \log(z) := \log(|z|) + i\arg(z)$$

für $z \neq 0$; es gilt

$$e^{\log z} = z \text{ falls } z \neq 0,$$
$$\log(e^z) = z \text{ falls } \mathrm{Im}(z) \in (-\pi, \pi].$$

Folgen

Eine unendliche Folge von reellen Zahlen ist definiert als eine Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$. Statt $n \mapsto a(n)$ ist die Schreibweise $(a_n)_n$ gebräuchlich; zum Beispiel ist $(1/n)_n$ die Folge $n \mapsto 1/n$ oder $(1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots)$.

Es sei $(a_n)_n$ eine Folge, a eine reelle Zahl. Wir sagen: "$(a_n)_n$ konvergiert gegen a" oder "a ist Grenzwert von $(a_n)_n$" oder $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, wenn die Folge für wachsendes n dem Wert a beliebig nahe kommt und auch nahe bleibt: für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein N, sodaß $n > N \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon$.

Grenzwerte

Eine Folge kann höchstens einen Grenzwert haben (sonst wäre die Schreibweise $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ auch widersprüchlich). Es gibt aber auch Folgen ohne Grenzwert; man nennt sie divergent.

Zum Beispiel hat die Folge $(n)_n$ keinen Grenzwert, weil sie über alle Schranken wächst. Die Folge $((-1)^n)_n$ hat keinen Grenzwert, weil sie unendlich oft hin und her springt.

Grenzwerte

Eine Folge $(a_n)_n$ heißt monoton wachsend/fallend, falls $a_n \leq a_{n+1}$ bzw. $a_n \geq a_{n+1}$ gilt für alle n.

Eine Zahl M heißt obere/untere Schranke der Folge $(a_n)_n$, falls $a_n \leq M$ bzw. $a_n \geq M$ gilt für alle n. Eine Folge heißt nach oben/unten beschränkt, wenn sie eine obere/untere Schranke besitzt. Eine Folge heißt beschränkt, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Satz. Jede monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge ist konvergent.

Grenzwerte

Umgekehrt ist jede konvergente Folge beschränkt, muß aber nicht monoton wachsend oder monoton fallend sein. Das zeigt das Beispiel $((-1)^n/n)_n$.

Grenzwertregeln

Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei konvergente Folgen, und λ eine reelle Zahl. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n)$$

Falls $b_n \neq 0$ für alle n und $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, dann auch

$$\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)/(\lim_{n\to\infty} b_n)$$

Anwendung der Grenzwertregeln

Wir berechnen den Grenzwert der Folge $\left(\frac{n^2+2n+3}{2n^2+4}\right)_n$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n+3}{2n^2+4}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2/n+3/n^2}{2+4/n^2}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty}(1+2/n+3/n^2)}{\lim_{n\to\infty}(2+4/n^2)}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} 2/n + \lim_{n\to\infty} 3/n^2}{\lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} 4/n^2} = \frac{1+0+0}{2+0} = \frac{1}{2}$$

Reihen

Es sei $(a_n)_n$ eine Folge. Dann wird die Folge der Summen definiert durch

$$S_1 := a_1,\ S_{n+1} := S_n + a_{n+1} \text{ oder } S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Eine solche Folge heißt Reihe (über $(a_n)_n$). Falls sie konvergiert, schreiben wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Das ist nur dann möglich wenn $(a_n)_n$ den Grenzwert Null hat.

Teleskopreihen

Es sei $(b_n)_n$ eine Folge, und $(a_n)_n := (b_{n+1} - b_n)_n$ die Folge der Differenzen aufeinanderfolgender Glieder. Es sei $(S_n)_n$ die Reihe über $(a_n)_n$. Dann gilt

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1,$$

und die Reihe konvergiert wenn die Folge b_n konvergiert.

Beispiel: $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}, \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Die geometrische Reihe

Es sei $q \in \mathbb{R}$. Die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt geometrische Folge (es ist in diesem Fall günstig, mit dem Index 0 zu beginnen). Die dazugehörige Reihe heisst geometische Reihe, und es gilt

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Die geometrische Reihe ist konvergent genau dann wenn $|q| < 1$ ist. In diesem Fall ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Die harmonische Reihe

Es sei $(S_n)_n$ die Reihe über $(1/n)_n$. Dann gilt für alle n

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

und daher $S_{2^m n} \geq S_n + \frac{m}{2}$ für alle $m \in \mathbb{N}$, insbesondere

$$S_{2^m} \geq \frac{m}{2} + S_1 = \frac{m}{2} + 1.$$

Die Reihe ist also unbeschränkt und daher divergent.

Das Majorantenkriterium

Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ positive Folgen sodaß $a_n \leq b_n$ gilt für alle n. (Die Reihe über $(b_n)_n$ heißt dann Majorante über der Reihe in $(a_n)_n$. Dann gilt:

Wenn die Reihe über $(b_n)_n$ konvergiert, dann konvergiert auch die Reihe über $(a_n)_n$.

Anwendung des Majorantenkriteriums

Die Reihe $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i+1}$ ist konvergent, da sie die geometrische Reihe mit $q = \frac{1}{2}$ als Majorante hat.

Die Reihe $\sum_{i=0}^{n} \frac{i}{i^2-1}$ ist nicht konvergent, da sie selbst Majorante der harmonischen Reihe ist.

Die Exponentialreihe

Wir sind jetzt in der Lage, die Exponentialfunktion zu definieren:

$$e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

$$e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{1} + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

Weitere Reihen

Die $\log$-Funktion erhält man dann als Umkehrfunktion von e^-, und die restlichen Potenz- und Exponentialfunktionen erhält man durch
$a^b = e^{\log(a)b}$.

$$\sin(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \pm \dots$$

$$\cos(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \pm \dots$$

Die Zahl $\pi := 3.14159265358979323 85\dots$ kann nun definiert werden als die kleinste positive Nullstelle der Funktion $\sin$.

Stetigkeit von Funktionen

Defintion. Es sei D ein Intervall oder $D = \mathbb{R}$, $x \in D$, und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen f ist stetig wenn für alle Folgen $(x_n)_n$ in D mit Grenzwert x auch die Folge der Funktionswerte $(f(x_n))_n$ konvergiert.

Zum Beispiel sind alle Funktionen, die aus den arithmetischen Operationen gebildet werden können, stetig (Folgerung aus den Grenzwertsätzen). Die Exponentialfunktion, Potenfunktion, Logarithmus- Funktion, Winkelfunktionen und zyklometrischen Funktionen sind ebenfalls überall im Definitionsbereich stetig.

Sprungstellen

Die Funktion sign ist nicht stetig in 0: die Folge $((-1)^n/n)_n$ konvergiert gegen Null, aber die Folge der Funktionswerte ist $(-1, 1, -1, 1, \dots) = ((-1)^n)_n$ ist divergent. Wenn wir uns allerdings auf positive Folgen einschränken, existiert der Grenzwert (und ist gleich $+1$).

Wir sagen f hat bei x einen rechtsseitigen Grenzwert a, wenn für alle Folgen $(x_n)_n$ in D mit $x_n > x$ mit Grenzwert x auch die Folge der Funktionswerte $(f(x_n))_n$ konvergiert:

$$\lim_{y \to x_+} f(y) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$$

Sprungstellen

Der linksseitige Grenzwert ist analog definiert. Die Funktion sign hat bei 0 den linksseitigen Grenzwert -1 und den rechtsseitigen Grenzwert $+1$.

Eine Funktion ist genau dann stetig bei x, wenn rechtsseitiger Grenzwert und linkswertiger Grenzwert beide existieren, übereinstimmen, und mit dem Funktionswert bei x übereinstimmen.

Stetige Fortsetzung

Wenn die Funktion f an der Stelle x_0 nicht definiert ist, aber der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert existieren und übereinstimmen, wird dieser Wert als Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x)$ bezeichnet. Dann ist f stetig fortsetzbar in x_0.

Beispiel: $f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x}{x}$ kann in $x = 0$ durch $f(0) := -1$ stetig fortgesetzt werden, denn

$$\lim_{x \to 0_+} f(x) = \lim_{x \to 0_-} f(x) = -1$$

Andere Unstetigkeiten

Senkrechte Asymptote: Wenn die Funktion in der Nähe von x nicht beschränkt ist, kann sie nicht in x stetig fortgesetzt werden. Beispiel: $x \mapsto \frac{1}{x}$ an der Stelle 0.

Oszillation: Die Funktion $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ schwankt in der Nähe von 0 unendlich oft zwischen $+1$ und -1 hin und her und ist daher auch nicht in 0 fortsetzbar.

Hingegen ist die Funktion $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sehr wohl in 0 fortsetzbar, nämlich durch den Wert 0.

Grenzwertregeln für Funktionen

Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Es seien $f, g : \mathbb{R}\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, und λ eine reelle Zahl. Dann gilt

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = (\lim_{x\to x_0} f(x))(\lim_{x\to x_0} g(x))$$

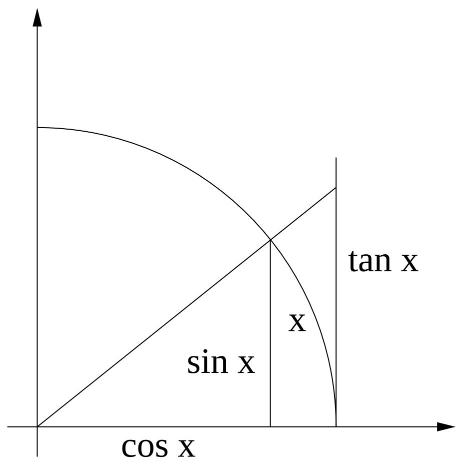
Falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \neq x_0$ und $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, dann auch

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{h\to 0} f(x_0 + h)$$

Ein trigonometrischer Grenzwert

Durch Vergleich der Flächeninhalte kleines Dreieck / Kreisausschnitt / großes Dreieck erhält man für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ die Ungleichung



$$\frac{1}{2}\sin x \cos x \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2}\tan x$$

Ein trigonometrischer Grenzwert

Durch umformen (Division durch $\sin x$, Kehrwert) erhalten wir

$$\cos(x) \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

Weil $x \mapsto \cos x$ und $x \mapsto \frac{1}{\cos x}$ beide bei Null stetig sind und den Wert 1 haben, existiert der Grenzwert der Funktion in der Mitte:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(Die Funktion $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ ist bei $x = 0$ stetig fortsetzbar.)

Der Zwischenwertsatz

Satz. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) < 0$, und $f(b) > 0$. Dann existiert $c \in (a, b)$ sodaß $f(c) = 0$ gilt.

Das Bisektionsverfahren

Gegeben: Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ststig, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$.

Ausgabe: Eine Nullstelle $c \in (a, b)$, oder eine Folge in $[a, b]$, die gegen eine Nullstelle konvergiert.

schreibe a als erstes/nächstes Glied auf die Ausgabefolge
if $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ then
    Nullstelle gefunden; Ausgabe von $\frac{a+b}{2}$
else if $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$ then
        $a_1 := \frac{a+b}{2}$; $b_1 := b$;
    else
        $a_1 := a$; $b_1 := \frac{a+b}{2}$;
    rekursiver Aufruf mit $f : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}$

Beweis der Korrektheit

Wenn das Verfahren terminiert, dann ist jedenfalls eine Nullstelle gefunden. Wenn nicht, so definiert das Verfahren eine monoton wachsende Folge $(a_n)_n$. Sie ist beschränkt, also konvergent wegen dem Satz auf Seite 27.

Fortsetzung Beweis

Um zu zeigen, daß der Grenzwert eine Nullstelle von f ist, konstruieren wir analog die Folge $(b_n)_n$ der oberen Intervallgrenzen. Diese Folge ist monoton fallend und ebenfalls beschränkt. Die Folge der Differenzen $(b_n - a_n)_n$ ist eine geometrische Folge mit $q = 1/2$, sie hat der Grenzwert 0, und es folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: c$$

Nach Konstruktion ist $f(a_n) < 0$ und $f(b_n) > 0$ für alle n. Also ist

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}(f(b_n)) = f(c) = \lim_{n\to\infty}(f(a_n)) \leq 0$$

Die Ableitung: dynamische Interpretation

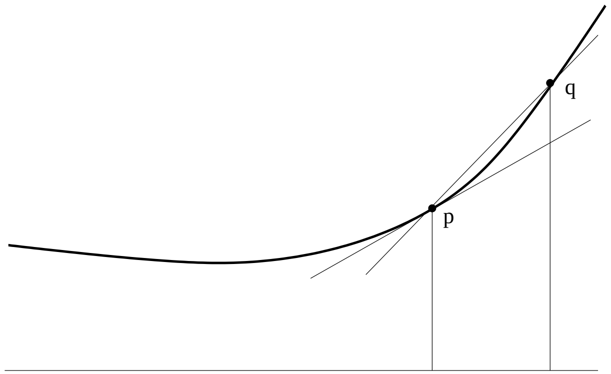
Angenommen, die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ beschreibt eine Bewegung: das Intervall D ist ein Zeitintervall, und $f(t)$ ist der Ort eines Punktes zum Zeitpunkt t. Dann ist $f'(t)$ die momentane Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t.

Es sei $t < s, t \in D$. Die durchschnittliche Geschwindigkeit im Zeitintervall $[t, s]$ beträgt $\frac{f(s)-f(t)}{s-t}$. Man erhält die Momentangeschwindigkeit als Grenzwert

$$f'(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(s) - f(t)}{s - t}.$$

Die Ableitung: geometrische Interpretation

Der Graph einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist eine Kurve in der Ebene. Die Ableitung $f'(x)$ ist die Steigung der Tangente an die Kurve im Punkt $p := (x, f(x))$.



Die Steigung der Geraden durch zwei Kurvenpunkte p und $q := (u, f(u))$ ist gleich $\frac{f(u)-f(x)}{u-x}$, also ist wieder

$$f'(x) = \lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x}.$$

Streng mathematisch

Definition. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x \in D$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x}$$

existiert (m.a.W.: wenn die Funktion $u \mapsto \frac{f(u)-f(x)}{u-x}$ in x stetig fortsetzbar ist). Der Grenzwert heißt Ableitung von f bei x und wird mit $f'(x)$ bezeichnet.

Falls f in allen Stellen $x \in D$ differenzierbar ist, dann nennen wir f differenzierbar und die Funktion $f' : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$ die Ableitung von f.

Ableitung der konstanten Funktionen

$$\lim_{u \to x} \frac{c - c}{u - x} = \lim_{u \to x} 0 = 0$$

Die Ableitung der konstanten Funktion $x \mapsto c$ ist die konstante Nullfunktion $x \mapsto 0$.

Ableitung der linearen Funktionen

$$\lim_{u \to x} \frac{au + b - ax - b}{u - x} = \lim_{u \to x} a = a$$

Die Ableitung der linearen Funktion $x \mapsto ax + b$ ist die konstante Funktion $x \mapsto a$.

Ableitung von $x \mapsto x^2$

$$\lim_{u \to x} \frac{u^2 - x^2}{u - x} = \lim_{u \to x} (u + x) = 2x$$

Die Ableitung der Funktion $x \mapsto x^2$ ist die lineare Funktion $x \mapsto 2x$.

Ableitung von Potenzfunktionen

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$.

$$\lim_{u \to x} \frac{u^n - x^x}{u - x} = \lim_{u \to x} (u^{n-1} + ux^{n-2} + \cdots + x^{n-1}) = nx^{n-1}$$

Die Ableitung der Funktion $x \mapsto x^n$ ist die Funktion $x \mapsto nx^{n-1}$.

Ableitung von $x \mapsto \sqrt{x}$

$$\lim_{u \to x} \frac{\sqrt{u} - \sqrt{x}}{u - x} = \lim_{u \to x} \frac{1}{\sqrt{u} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

falls $x > 0$.

Im Intervall $(0, \infty)$ ist die Ableitung der Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ die Funktion $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Die Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ ist an der Stelle 0 nicht differenzierbar.
Die Tangente an den Graphen ist senkrecht, Steigung ∞.

Ableitung der Sinusfunktion

Wir ersetzen u durch $x+h$ (letzte Grenzwertregel auf Seite 44).

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}\sin(x)+\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}\cos(x)=\cos'(0)\sin(x)+\sin'(0)\cos(x)=\cos(x).$$

Die Ableitung der Funktion $x\to\sin(x)$ ist die Funktion $x\to\cos(x)$.

Nebenrechnung

Der Grenzwert $\sin'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}$ ist 1, siehe Seite 46.

Für den anderen Grenzwert rechnen wir

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1 - \cos(h)^2}{h(1 + \cos(h))} = \lim_{h\to 0} \frac{-\sin(h)^2}{h(1 + \cos(h))} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} \lim_{h\to 0} \frac{-\sin(h)}{1 + \cos(h)} = 1 \cdot \frac{-\sin(0)}{1 + \cos(0)} = 0.$$

Ableitung der Cosinusfunktion

Wir ersetzen u durch $x+h$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\sin(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}\cos(x)-\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}\sin(x)=\cos'(0)\cos(x)-\sin'(0)\sin(x)=-\sin(x$$

Die Ableitung der Funktion $x\to\cos(x)$ ist die Funktion $x\to -\sin(x)$.

Ableitung der Exponentialfunktion

Wir ersetzen u durch $x + h$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} e^x = 1 \cdot e^x = e^x.$$

Die Ableitung der Funktion $x \to e^x$ ist wieder die Funktion $x \to e^x$.

Nicht differenzierbare Funktionen

Wir haben schon ein Beispiel gesehen (senkrechte Tangente).

Differenzierbare Funktionen sind stetig wegen den Grenzwertregeln:

$$0 \cdot f'(x) + f(x) = \lim_{u \to x} (u - x) \lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} + \lim_{u \to x} f(x) = \lim_{u \to x} f(u)$$

Also sind unstetige Funktionen nicht differenzierbar.

Die Betragfunktion $x \mapsto |x|$ ist nicht differenzierbar bei 0, da der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert nicht übereinstimmen (Knickpunkt).

Linearität der Ableitung

Satz. Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktion $(f + g) : x \mapsto f(x) + g(x)$ und $cf : x \mapsto cf(x)$ differenzierbar, und es gilt

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x), (cf)'(x) = cf'(x)$$

für alle $x \in D$.

Nun können wir z.B. die Funktion $x \mapsto 3e^x - x^2 + 17\cos x - 1$ differenzieren.

Produktregel

Satz. Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Dann ist auch die Funktion $(f \cdot g) : x \mapsto f(x)g(x)$ differenzierbar, und es gilt

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

für alle $x \in D$.

Beweis Produktregel

Anwendung der Grenzwertregeln (Folie 44):

$$\lim_{u \to x} \frac{f(u)g(u) - f(x)g(x)}{u - x} =$$

$$\lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} \lim_{u \to x} g(u) + \lim_{u \to x} f(x) \lim_{u \to x} \frac{g(u) - g(x)}{u - x}$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Quotientenregel

Satz. Es seien $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ differenzierbare Funktionen. Dann ist auch die Funktion $(f/g) : x \mapsto f(x)/g(x)$ differenzierbar, und es gilt

$$(f/g)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

für alle $x \in D$.

Damit kann man Potenzfunktionen mit negativen Exponenten ableiten. Wir setzen $f(x) = 1$ und $g(x) = x^n$, $n > 0$. Der Quotient $f/g : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{-n}$ hat dann die Ableitung

$$(f/g)'(x) = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}.$$

Beweis Quotientenregel

$$\lim_{u \to x} \frac{\frac{f(u)}{g(u)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{u - x} =$$

$$\frac{\lim_{u\to x} \frac{f(u)-f(x)}{u-x} g(x)}{\lim_{u\to x} g(u)g(x)} - \frac{\lim_{u\to x} \frac{g(u)-g(x)}{u-x} f(x)}{\lim_{u\to x} g(u)g(x)}$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Ableitung der Tangens-Funktion

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos(x)^2}$$

$$= \frac{\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2$$

Kettenregel

Satz. Es seien $f : D_1 \to \mathbb{R}$, $g : D_2 \to D_1$ differenzierbare Funktionen. Dann ist auch die Funktion $f \circ g : x \mapsto f(g(x))$ differenzierbar, und es gilt

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

für alle $x \in D$.

Beweis Kettenregel

$$\lim_{u \to x} \frac{f(g(u)) - f(g(x))}{u - x} =$$

$$\lim_{u \to x} \frac{f(g(u)) - f(g(x))}{g(u) - g(x)} \lim_{u \to x} \frac{g(u) - g(x)}{u - x} =$$

$$\lim_{v \to g(x)} \frac{f(v) - f(g(x))}{v - g(x)} g'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Ableitung der Umkehrfunktion

Satz. Es sei D ein Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Es sei $W := f(D)$ der Wertebereich von D. Dann existiert $f^{-1} : W \to D$, und es gilt

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

für alle $y \in W$.

Wir können nun die $\log$-Funktion als Umkehrfunktion von $\exp : x \to e^x$ ableiten:

$$\log'(y) = \frac{1}{\exp'(\log(y))} = \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y}$$

Beweis für die Umkehrfunktion

Zunächst muß f streng monoton wachsend oder fallend sein, je nach Vorzeichen von f'. Daher existiert f^{-1}. Die Umkehrfunktion ist wieder stetig. Daher gilt

$$\lim_{v\to y}\frac{f^{-1}(v)-f^{-1}(y)}{v-y}=\frac{1}{\lim_{v\to y}\frac{v-y}{f^{-1}(v)-f^{-1}(y)}}$$

$$=\frac{1}{\lim_{v\to y}\frac{f(f^{-1}(v))-f(f^{-1}(y))}{f^{-1}(v)-f^{-1}(y)}}=\frac{1}{\lim_{u\to f^{-1}(y)}\frac{f(u)-f(f^{-1}(y))}{u-f^{-1}(y)}}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Ableitung für Arcustangens

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan(\arctan(x))^2} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Ableitung der Potenzfunktionen

Es sei $a \in \mathbb{R}$, $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^a = \exp(a \log(x))$. Nach der Kettenregel ist

$$f'(x) = \exp'(a \log(x)) a \log'(x) = \exp(a \log(x)) \frac{a}{x} = x^a \frac{a}{x} = a x^{a-1}.$$

Numerische Ableitung

Die Ableitung kann angenähert werden durch den Differentenquotient:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ oder } \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

für $h > 0$, aber $h \approx 0$. Beim numerischen Rechnen ist folgendes zu beachten: bei der Auswertung des Zählers tritt unter Umständen ein Fehler auf. Dieser Fehler wird durch die Division durch h stark vergrößert. Daher darf man h nicht all zu klein wählen.

Analyse des Fehlers

Der Gesamtfehler setzt sich aus Verfahrensfehler und Rundungsfehler zusammen.

Der Verfahrensfehler ist der Unterschied zwischen dem exakten Wert der Ableitung und dem exakten Wert des Differenzenquotienten. Um ihn zu bestimmen, nehmen wir an, daß f in der Nähe von x durch eine Polynomfunktion approximiert werden kann:

$$f(x+t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + R(t)t^3,$$

wobei $R(t)$ beschränkt und differenzierbar ist. (Dies gilt auch wenn f mindestens zweimal stetig ableitbar ist - siehe Kapitel "Taylorreihen".)

Der Verfahrensfehler

Es gilt

$$f'(x) = (a_1 + 2a_2 t + 3t^2 R(t) + t^3 R'(t))_{t=0} = a_1,$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a_1 + a_2 h + R(h) h^2,$$
$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = a_1 + \frac{R(h) + R(-h)}{2} h^2.$$

Für kleine h ist der Fehler beim einseitigen Verfahren $V_1 \approx a_2 h$, und beim beidseitigen Verfahren $V_2 \approx R(0) h^2$.

Der Rundungsfehler

Vereinfachend nehmen wir an, daß beim Berechnen eines Funktionswerts ein Fehler in der Größenordnung von ϵ gemacht wird:

$$R_1 = \left| \frac{(f(x+h) \pm \epsilon) - (f(x) \pm \epsilon)}{h} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq \frac{2\epsilon}{h},$$

$$R_2 = \left| \frac{(f(x+h) \pm \epsilon) - (f(x-h) \pm \epsilon)}{2h} - \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \right| \leq \frac{\epsilon}{h}.$$

Wahl des Parameters h

Wir wollen h so wählen, daß der Gesamtfehler

$$G_1 = V_1 + R_1 \approx |a_2|h + \frac{2\epsilon}{h} \text{ bzw. } G_2 = V_1 + R_2 \approx |R(0)|h^2 + \frac{\epsilon}{h}$$

so klein wie möglich ist.

Dazu setzen wir die Ableitung der Funktion $f_1 : h \mapsto |a_2|h + \frac{2\epsilon}{h}$ bzw. $f_2 : h \mapsto |R(0)|h^2 + \frac{\epsilon}{h}$ gleich Null und erhalten

Wahl des Parameters h

$$f_1'(h) = |a_2| - \frac{2\epsilon}{h^2} \text{ hat Nullstelle bei}$$

$$h_1 = \sqrt{\frac{2\epsilon}{|a_2|}}$$

$$G_1(h_1) = \sqrt{8\epsilon|a_2|}$$

Wahl des Parameters h

$$f_2'(h) = 2|R(0)|h - \frac{\epsilon}{h^2} \text{ hat Nullstelle bei}$$

$$h_2 = \sqrt[3]{\frac{\epsilon}{2|R(0)|}}$$

$$G_2(h_2) = 3\sqrt[3]{\frac{|R(0)|\epsilon^2}{4}}$$

Überschlagsrechnung

Typische Werte sind $10^{-1} < |a_2| < 10$, $10^{-1} < |R(0)| < 10$ $\epsilon = 10^{-7}$ oder $\epsilon = 10^{-16}$. Größenordnungsmäßig ist dann ϵ maßgeblich, und eine Überschlagsrechnung ergibt:

Beim einseitigen Verfahren wähle man $h \approx \epsilon^{1/2}$. Der Gesamtfehler hat dann Größenordnung $\epsilon^{1/2}$.

Beim beidseitigen Verfahren wähle man $h \approx \epsilon^{1/3}$. Der Gesamtfehler hat dann Größenordnung $\epsilon^{2/3}$.

Grundbegriffe der Optimierung

Es sei $D \subset R$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Es sei $x_0 \in D$ und $y_0 := f(x_0)$.

y_0 heißt globales Maximum, und x_0 heißt globale Maximalstelle, wenn $f(x) \leq y_0$ für alle $x \in D$.

y_0 heißt globales Minimum, und x_0 heißt globale Minimalstelle, wenn $f(x) \geq y_0$ für alle $x \in D$.

y_0 heißt lokales Maximum, und x_0 heißt globale Maximalstelle, wenn $f(x) \leq y_0$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \epsilon$, für ein $\epsilon > 0$.

y_0 heißt lokales Minimum, und x_0 heißt globale Minimalstelle, wenn $f(x) \geq y_0$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \epsilon$, für ein $\epsilon > 0$.

Grundlegende Fakten

- Ein globales Maximum / Minimum ist auch ein lokales Maximum / Minimum.
- Es kann mehrere lokale Maxima/Minima geben.
- Es kann nur ein globales Maximum / Minimum geben, das aber an mehreren Stellen erreicht werden kann.
- Das Maximum / Minimum muß nicht existieren.
- Wenn $D = [a, b]$ (dh D ist ein abgeschlossenes beschränktes Intervall), dann existieren Maximum und Minimum (O./O. Seite 67).

Lokale Extrema und Ableitungen

Satz. Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Es sei x_0 ein innerer Punkt von D (d.h. $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset D$ für ein $\epsilon > 0$). Wenn x_0 eine lokale Maximal- oder Minimalstelle ist, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Lokale Extrema und Ableitungen

[Beweis-Idee: man nehme indirekt an, daß x_0 ein lokales Maximum ist, und daß $f'(x_0) =: a > 0$ ist. (Die anderen Fälle werden später analog behandelt.) Dann konvergiert die Folge $\left(\frac{f(x_0+1/n)-f(x_0)}{1/n}\right)_n$ gegen a, und hat daher unendlich viele positive Folgenglieder. Für die ist dann $f(x_0+1/n) > f(x_0)$, und daher ist x_0 keine lokale Maximalstelle.]

Verfahren zur Optimierung

Falls ein Maximum/Minimum existiert, dann ist es entweder eine Nullstelle der Ableitung oder ein Randpunkt. Oft gelingt es, diese Nullstellen zu finden; danach muß man noch feststellen, ob tatsächlich ein Maximum/Minimum vorliegt.

Beispiel: siehe Folie 82 oder 83.

Ein Kriterium für lokale Extrema

Satz. Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Es sei x_0 ein innerer Punkt von D mit $f'(x_0) = 0$. Wenn $f''(x_0) > 0$ ist, dann hat f bei x_0 ein lokales Minimum. Wenn $f''(x_0) < 0$ ist, dann hat f bei x_0 ein lokales Maximum.

Ein Kriterium für lokale Extrema

[Beweis-Idee: Wenn $f''(x_0) > 0$ ist, dann ist f' in einer Umgebung $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ streng monoton steigend. Da $f'(x_0) = 0$ ist, folgt $f'(x) < 0$ für $x < x_0$ und $f'(x) > 0$ für $x > x_0$. Dann ist f in $(x_0 - \epsilon, x_0)$ streng monoton steigend und in $(x_0, x_0 + \epsilon)$ monoton fallend, und x_0 ist lokale Maximumstelle von $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$.]

Andere Möglichkeiten

Wenn man weiß, daß ein Maximum existiert, reicht es alle Nullstellen der Ableitung und alle Randpunkte zu bestimmen; der größte Funktionswert ist das globale Maximum.

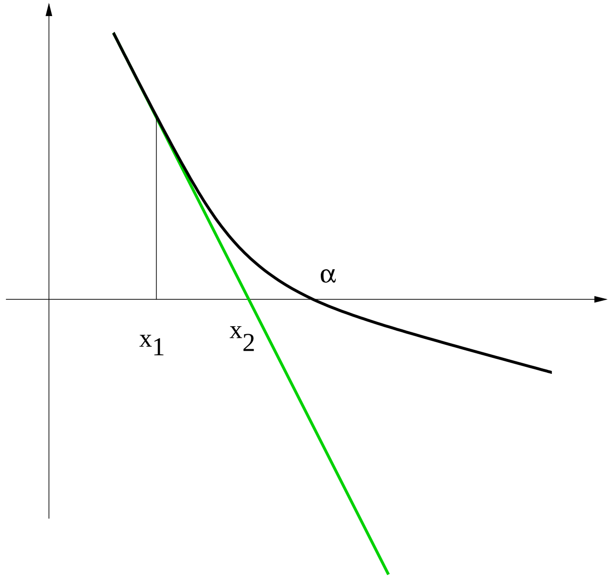
Das Newton-Verfahren

(siehe auch Bisektionsverfahren Folie 48)

Es sei D ein Intervall, und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Gesucht ist eine Nullstelle $\alpha \in D$, d.h. $f(\alpha) = 0$. Das Verfahren ist iterativ, es wird eine Folge von immer genaueren Näherungswerten konstruiert.

Angenommen, man kennt schon einen Näherungswert x_1. Dann kann man für x nahe bei x_1 die Funktion f durch eine lineare Funktion g approximieren, nämlich $g(x) = f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1)$. Der nächste Wert x_2 wird berechnet als Nullstelle von g.

Das Newton-Verfahren



$$0 = g(x_2) = f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Das Newton-Verfahren

Die Folge ist rekursiv definiert durch einen Startwert $x_0 \in D$ und die Rekursion $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Unterschiede zu Bisektionsverfahren:

- Das Verfahren konvergiert nicht immer (hängt von der Wahl des Startwerts ab)

- Wenn f zweimal stetig differenzierbar ist und x_1 genügend nahe bei einer Nullstelle ist, konvergiert das Verfahren deutlich schneller als das Bisektionsverfahren.

Beispiel

Wir suchen eine Lösung von $x^3 - 5 = 0$. Die Formel liefert

$$x_{n+1} := x_n - \frac{x_n^3 - 5}{3x_n^2}.$$

Bei Startwert $x_0 = 1$ erhält man die Folge

$$(1, 2.3333333, 1.8616780, 1.7220019, 1.7100597, 1.7099795, 1.7099795, \dots)$$

Konvergenz-Untersuchung

Wir schreiben $f(x)$ als $f(x) = a_0 + a_1(x-\alpha) + R(x)(x-\alpha)^2$. Es gilt dann $a_0 = f(\alpha) = 0$, $a_1 = f'(\alpha)$. Wir setzen voraus, daß $a_1 \neq 0$ ist. Da f' stetig ist, ist auch $f'(x) \neq 0$ für x nahe bei α.

$$|x_{n+1} - \alpha| = \left| x_n - \alpha - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right| = \left| \frac{f'(x_n)(x_n - \alpha) - f(x_n)}{f'(x_n)} \right|$$

$$= \left| \frac{R'(x_n)(x_n - \alpha)^3 + R(x_n)(x_n - \alpha)^2}{f'(x_n)} \right| \approx \left| \frac{R(\alpha)}{f'(\alpha)} \right| (x_n - \alpha)^2$$

Konvergenz-Untersuchung

In jedem Schritt wird die Anzahl der richtigen Stellen ungefähr verdoppelt (plus/minus die Stellen der Konstanten $\left|\frac{R(\alpha)}{f'(\alpha)}\right|$). Man spricht von quadratischer Konvergenz.

Beim Bisektionsverfahren wird die Anzahl der korrekten Binärstellen bei jedem Schritt um 1 erhöht – lineare Konvergenz, deutlich langsamer.

Noch ein Beispiel

Wenn $f'(\alpha) = 0$ ist (doppelte Nullstelle), dann kann das Newton-verfahren trotzdem konvergieren, aber die Konvergenz ist hier nur linear (Beispiel $f(x) = x^2$).

Auch wenn man schon weiß, das f monoton ist, kann es sein daß das Verfahren divergiert. Ein Beispiel ist das Verfahren für $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 4$ und Startwert 0.

Noch ein Beispiel

Die Funktion ist im Intervall $[0, 2]$ streng monoton fallend und hat bei $x = 1$ eine Nullstelle. Die Formel für Newton ergibt

$$x_{n+1} := \frac{2x_n^3 - 3x_n^2 - 4}{3x_n^2 - 6x_n - 2}$$

und die Folge mit Startwert 0 ist

$$(0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots)$$

Mit Startwert $x_0 = 0.1$ erhält man jedoch

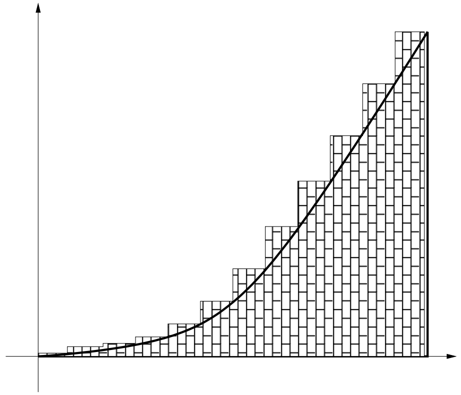
$$(0.1, 1.5673152, 0.9094856, 1.0002980, 1.0000000, 1.0000000, \dots)$$

Das bestimmte Integral

Für Gebiete in der Ebene, die durch Geraden begrenzt sind (Polygone), ist der Flächeninhalt klar definiert durch in kongruente Teilgebiete.

Für Gebiete, die durch Kurven begrenzt werden, ist das nicht mehr möglich. Der Flächeninhalt wird als Grenzwert definiert und berechnet.

Eine Fläche unter einer Parabel



Der Flächeninhalt ist definiert als Grenzwert der Folge gegeben durch

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} \left(\frac{i}{n} \right)^2 \right)$$

Eine Fläche unter einer Parabel

$$a_n = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

Definition des bestimmten Integrals

Es sei $[a, b]$ ein abgeschlossenes beschränktes Intervall. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt stückweise stetig, wenn es reelle Zahlen $a = c_0 < c_2 < c_r = b$ gibt, sodaß f in jedem offenen Teilintervall (c_i, c_{i+1}) stetig ist.

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stückweise stetige und beschränkte Funktion. Wir betrachten eine Folge von endlichen Folgen von Zahlen $((x_{i,j})_{0 \leq j \leq i})_{i \in \mathbb{N}}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$a = x_{i,0} \leq x_{i,1} \leq \cdots \leq x_{i,i} = b$$

$$\lim_{i \to \infty} \max_{j=1,\ldots,i} (x_{i+1} - x_i) = 0.$$

Definition des bestimmten Integrals

Fundamentalsatz der Integralrechnung. Der Grenzwert

$$\lim_{i \to \infty} \sum_{j=1,\ldots,i} ((x_{i+1} - x_i) f(x_i))$$

existiert und ist unabhängig von der Wahl der Folge von Folgen (solange die obigen Bedingungen erfüllt sind).

Den Grenzwert bezeichnet man als "Integral von f auf $[a, b]$" und schreibt ihn als $\int_a^b f(x)dx$.

Bemerkung

Die Höhe des Rechtecks ist oben gewählt als der Funktionswert des rechten Randpunktes. Man kann genausogut den linken Randpunkt wählen

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{j=1,\ldots,i} ((x_{i+1} - x_i) f(x_{i-1}))$$

oder einen beliebigen Wert in der Mitte, $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$:

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{j=1,\ldots,i} ((x_{i+1} - x_i) f(y_i))$$

Eigenschaften des Integrals

Linearität:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b (cf(x))dx = c\int_a^b f(x)dx$$

Monotonie: wenn $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, dann

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Eigenschaften des Integrals

Konstante und lineare Funktionen:

$$\int_a^b 1dx = b - a, \int_a^b xdx = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Schranken: wenn $u \le f(x) \le o$ für alle $x \in [a, b]$, dann

$$(b-a)u \le \int_a^b f(x)dx \le (b-a)o$$

Eigenschaften des Integrals

Für $a \leq b \leq c$ gilt

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Unter Beibehaltung dieser Eigenschaft definieren wir

$$\int_a^a f(x)dx := 0, \int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx.$$

Stammfunktionen

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Eine Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f wenn sie differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)$ gilt für alle $x \in [a, b]$.

Beispiele:

$f(x)$	0	c	x	$x^a, a \neq -1$	x^{-1}	e^x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$F(x)$	c	cx	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\log(\|x\|)$	e^x	$-\cos(x)$	$\sin(x)$

Stammfunktionen

Das erste Beispiel zeigt, daß Stammfunktionen nicht eindeutig sind. Wenn $x \mapsto F(x)$ eine Stammfunktion von f ist, dann ist auch $x \mapsto F(x) + c$ eine Stammfunktion.

Umgekehrt gilt: wenn F_1 und F_2 Stammfunktionen von f sind, dann ist $F_2(x) = F_1(x) + c$ für eine Konstante c.

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir definieren die Summenfunktion $G : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$G(x) := \int_a^x f(t)dt.$$

Dann ist $G(x)$ eine Stammfunktion.

Umgekehrt läßt sich jede Stammfunktion F von f schreiben als $F(x) = G(x) + c$. Es folgt die Formel

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_{x=a}^{x=b}.$$

Beweis

Mittels der Eigenschaften läßt sich zeigen:

$$\min_{y\in[x,u]} f(y) \frac{G(u)-G(x)}{u-x} \leq \max_{y\in[x,u]} f(y)$$

Für $u \to x$ konvergieren die beiden äußeren Seiten beide gegen $f(x)$, also gilt

$$G'(x) = \lim_{u\to x} \frac{G(u)-G(x)}{u-x} = f(x).$$

Schreibweise

Man verwendet die Schreibweise $\int f(x)dx$ – das unbestimmte Integral – für eine nicht näher spezifizierte Stammfunktion von f.

Regeln zur Integration

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int (cf(x))dx = c \int f(x)dx$$

(schon bekannt vom bestimmten Integral)

Partielle Integration

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx,$$

wobei F eine Stammfunktion von f ist. Zum Beweis braucht man nur beide Seiten ableiten und die Produktregel anwenden.

Ein Integrationsproblem wird auf ein anderes Integrationsproblem zurückgeführt, das nicht unbedingt einfacher ist. Die Anwendung dieser Regel ist dann sinnvoll, wenn der Faktor g durch ableiten sehr viel einfacher wird, z.B. $g(x) = x$ oder $g(x) = \log(x)$.

Beispiel

$$\int x \arctan(x) dx = \frac{1+x^2}{2} \arctan(x) - \int \frac{1+x^2}{2} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\frac{1+x^2}{2} \arctan(x) - \int \frac{1}{2} dx = \frac{1+x^2}{2} \arctan(x) - \frac{x}{2}$$

Die Substitutionsregel

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)),$$

wobei F eine Stammfunktion von f ist. Zum Beweis braucht man nur beide Seiten ableiten und die Kettenregel anwenden.

Zwei Spezialfälle kommen häufig vor:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)a\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \int \frac{1}{g(x)}g'(x)dx = \log(|g(x)|)$$

Beispiele

$$\int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}dx = -\log(|\cos(x)|)$$

$$\int \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\log(x^2+1)$$

Volumen von Rotationskörpern

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(x) \geq 0$ für alle x. Wenn der Graph von f um die x-Achse rotiert, entsteht ein Rotationskörpers.

Das Volumen des Körpers kann definiert/berechnet werden als Grenzwert des Volumens von Körpern, die aus Kreisscheiben von Radius $f(x_i)$ und Dicke $x_{i+1} - x_i$ zusammengebaut; $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Volumen von Rotationskörpern

Es sei $((x_{i,j})_{0 \leq j \leq i})_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen wie auf Folie 104. Dann ist

$$V = \lim_{i \to \infty} \sum_{j=1,\ldots,i} ((x_{i+1} - x_i) f(x_i)^2 \pi)$$

und durch Vergleich mit der Definition des bestimmten Integrals folgt

$$V = \int_a^b (f(x)^2 \pi) dx = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

Beispiel

Wir setzen $f : [-R, R] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{R^2 - x^2}$.

$$V = \pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}^2 dx = \pi \int_{-R}^{R} R^2 dx - \pi \int_{-R}^{R} x^2 dx$$

$$= \pi \left(R^2 x \Big|_{x=-R}^{x=R} - \frac{x^3}{3} \Bigg|_{x=-R}^{x=R} \right) = \pi \left(2R^3 - \frac{2}{3} R^3 \right) = \frac{4R^3 \pi}{3}$$

Bogenlänge einer Kurve

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Das Bogenlänge des Graphen kann definiert/berechnet werden als Grenzwert der Summe von Strecken zwischen den Punkten $(x_i, f(x_i))$ und $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, für $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Bogenlänge einer Kurve

Es sei $((x_{i,j})_{0\le j\le i})_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen wie auf Folie 104. Dann ist

$$L = \lim_{i\to\infty} \sum_{j=1,\ldots,i} \sqrt{(f(x_{i+1}) - f(x_i))^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}$$

Bogenlänge einer Kurve

Für jedes i gibt es ein $y_i \in [x_i, x_{i+1}]$, sodaß $f'(y_i) = \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}$ gilt. Daraus folgt

$$\sqrt{(f(x_{i+1}) - f(x_i))^2 + (x_{i+1} - x_i)^2} = \sqrt{f'(y_i)^2(x_{i+1} - x_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}$$

$$= \sqrt{f'(y_i)^2 + 1}(x_{i+1} - x_i),$$

$$L = \lim_{i\to\infty} \sum_{j=1,\ldots,i} \sqrt{f'(y_i)^2 + 1}(x_{i+1} - x_i) = \int_a^b \sqrt{f'(x)^2 + 1}dx$$

wegen Folie 106.

Beispiel

Wir berechnen die Bogenlänge der Parabel $y = x^2$ zwischen den Punkten $(0, 0)$ und $(1, 1)$.

$$f(x) = x^2, f'(x) = 2x, \sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + 4x^2}$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx$$

Das unbestimmte Integral kann mit den uns bekannten Methoden nicht ausrechnen.

Beispiel

Der Algorithmus in Maple liefert

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx = \frac{x\sqrt{1+4x^2}}{2} + \frac{\log\left(2x+\sqrt{1+4x^2}\right)}{4},$$

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\log\left(2+\sqrt{5}\right)}{4} = 1.478942857$$

Mantelfläche eines Rotationskörpers

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f(x) \geq 0$ für alle x. Wenn der Graph von f um die x-Achse rotiert, entsteht ein Rotationskörpers. Die Mantelfläche (Oberfläche ohne die beiden Kreisscheiben) wird berechnet/definiert als Grenzwert der Summe von Kegelstumpf-Mantelflächen.

Für die einzelne Kegelstumpf-Mantelfläche gilt

$$M_i = \pi(f(x_i) + f(x_{i+1}))\sqrt{(f(x_{i+1}) - f(x_i))^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}$$

$$= 2\pi f(y_i)\sqrt{f'(y_i)^2 + 1}(x_{i+1} - x_i)$$

für ein $y_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Mantelfläche eines Rotationskörpers

Die gesamte Mantelfläche ist daher

$$M = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{f'(x)^2 + 1}dx$$

Beispiel

Wir setzen wieder $f : [-R, R] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{R^2 - x^2}$.

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \sqrt{f'(x)^2 + 1} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$M = 2\pi \int_{-R}^{R} R dx = 4R^2\pi$$

Taylorpolynome

Es sei D ein Intervall, welches den Nullpunkt enthält. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die mindestens n mal stetig differenzierbar ist.

Wenn wir die Funktion vergessen haben, aber die n-te Ableitung $g : D \to \mathbb{R}$ und die Werte der Ableitungen $f(0), f'(0), \ldots, f^{(n-1)}(0)$ kennen, dann läßt sich f durch Integration zurückgewinnen:

Taylorpolynome

$$f^{(n-1)}(t) = \int_0^t g(s)ds + f^{(n-1)}(0),$$

$$f^{(n-2)}(t) = \int_0^t \int_0^{s_2} g(s_1)ds_1 ds_2 + f^{(n-1)}(0)t + f^{(n-2)}(0), \ldots$$

$$f(t) = \int_0^t \ldots \int_0^{s_n} g(s_1)ds_1 \ldots ds_n + f^{(n-1)}(0)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + f(0).$$

Das Integral läßt sich abschätzen, wenn man eine Schranke für $|g(t)|$ kennt:

Taylorpolynome

$$\left|\int_0^t g(s)ds\right| \leq Mt,$$

$$\left|\int_0^t \int_0^{s_2} g(s_1)ds_1 ds_2\right| \leq M\frac{t^2}{2}, \dots,$$

$$\left|\int_0^t \dots \int_0^{s_n} g(s_1)ds_1 \dots ds_n\right| \leq M\frac{t^n}{n!}.$$

Resultat

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f'(0)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1} + O(t^n),$$

$$f(x+t) = f(x)+f'(x)t+\frac{f'(x)}{2!}t^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}t^{n-1}+O(t^n),$$

$$f(u) = f(x)+f'(x)(u-x)+\frac{f'(x)}{2!}(u-x)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(u-x)^{n-1}+O((u-x)^n).$$

Jede differenzierbare Funktion läßt sich in einer kleinen Umgebung durch eine Polynomfunktion annähern. Die Aproximation ist um so besser, je öfter die Funktion differenzierbar ist.

Die Groß-O-Notation

$O(f(x))$ ist die Bezeichnung für einen nicht näher bezeichneten Term der Form $B(x)f(x)$, wobei $B(x)$ beschränkt ist. Zum Beispiel ist $O(x^n)$ ein Term zwischen $-Cx^n$ und Cx^n, wobei C nicht von x abhängt.

Man verwendet dasselbe Symbol für verschiedene Terme ("Mißbrauch der Sprache"), z.B. bei

$$O(x^2) + O(x^3) = O(x^2)$$

Taylorreihen

Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Dann heißt die Potenzreihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} t^i = f(x) + f'(x)t + \frac{f''(x)}{2!} t^2 + \ldots$$

die Taylorreihe von f bei x.

Man möchte gerne haben, daß die Reihe gegen $f(x + t)$ konvergiert, so wie auf Folie 37/38.

Abschätzung des Fehlers

Wie wir auf Folie 133 festgestellt haben, ist der Fehler beim n-ten Taylorpolynom gleich $M|t|^n/n!$, wobei M eine Schranke für $f^{(}n)(t)$ im Intervall $t \in [0, x]$ (oder $[x, 0]$) ist. Die Schranke hängt im allgemeinen von n ab. Wegen $|t| \leq |x|$ läßt sich der Fehler abschätzen durch $M_n|x|^n/n!$. Wenn die Folge $(M_n|x|^n/n!)_n$ gegen 0 konvergiert, dann konvergiert die Taylorreihe gegen den Funktionswert.

Exponentialreihe, Sinus- und Cosinusreihe

Im Fall $f(x) = e^x/\sin(x)/\cos(x)$ sind die Ableitungen periodisch, daher haben wir Schranken $M = e^t/1/1$ für alle Ableitungen $f^{(n)}(s)$ im Intervall $s \in [0,t]$, also M hängt nicht von n ab. Wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{Mx^n}{n!} = 0$ geht die Folge der Fehlerabschätzungen gegen Null, für jedes $t \in \mathbb{R}$. Daher konvergiert die Taylorreihe immer gegen den Funktionswert.

Die Taylorreihe liefert in diesen Fällen eine effiziente Methode zum Auswerten.

Die geometrische Reihe als Taylorreihe

Wir setzen $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$. Dann ist

$$f'(x) = -x^{-2}, f''(x) = +2!x^{-3}, \ldots, f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-n-1}$$

und die Taylorreihe bei 1 ist daher

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots.$$

Diese Reihe konvergiert für $|x| < 1$ gegen den Funktionswert $\frac{1}{1+x}$. Für $|x| \geq 1$ ist die Taylorreihe aber divergent.

Die Taylorreihe des Logarithmus

Wir setzen $f(x) = \log(x)$. Dann ist

$$f'(x) = -1, f''(x) = -x^{-2}, f'''(x) = +2!x^{-3}, \ldots, f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$$

und die Taylorreihe bei 1 ist daher

$$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\frac{x^i}{i} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots.$$

Die Taylorreihe des Logarithmus

Der Fehler läßt sich abschätzen durch die Folge $(\frac{x^m}{m})_m$, und die Folge konvergiert gegen 0 für $|x| \leq 1$. Also ist

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$$

für $x \in (-1, 1]$.

Gliedweise Integration

Die Taylorreihe des Logarithmus hätte man auch durch gliedweise Integration der geometrischen Reihe erhalten können:

$$\log(1+x) = \int \frac{1}{1+x} dx = \int (1 - x + x^2 + \dots) dx$$

$$= \int 1 dx - \int x dx + \int x^2 dx - \dots = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

Das funktioniert für beliebige Potenzreihen im Innern des Konvergenzbereichs.

Die Taylorreihe des Arcustangens

Durch gliedweises Integrieren von $\frac{1}{1+x^2}$ erhalten wir

$$\arctan(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int (1 - x^2 + x^4 + \ldots) dx$$

$$= \int 1 dx - \int x^2 dx + \int x^4 dx - \cdots = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$$

Diese Reihe wird verwendet zur Berechnung von π.

Ein seltsames Beispiel

Wir setzen $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ für $x \neq 0$. Die Ableitungen sind von der Gestalt $P(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$, wobei P ein Polynom ist. Da die Exponentialfunktion stärker wächst als jedes Polynom, existiert der Grenzwert für $x \to 0$. Daher läßt sich f stetig fortsetzen, und wir erhalten eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(0) = f'(0) = f'''(0) = \cdots = 0.$$

Die Taylorreihe bei 0 ist Null. Sie konvergiert natürlich für alle x, aber nicht gegen die Funktion f sondern gegen die Nullfunktion.

Extremstellen

Satz. Es sei $n \geq 2$. Es sei x ein innerer Punkt von D, $f : D \to \mathbb{R}$ mindestens $n+1$-mal differenzierbar, $f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n-1)} = 0$, und $a := f^{(n)}(x) \neq 0$. Dann gilt:
Wenn n gerade ist, besitzt f bei x ein Grenzwert, und zwar ein Maximum/Minimum falls $a < 0/a > 0$ ist.
Wenn n ungerade ist, liegt keine Extremstelle vor (Wendepunkt).

Beweis: In der Nähe von x gilt

$$f(u) = f(x) + \frac{a}{n!}(u-x)^n + O((u-x)^{n+1})$$

Das Vorzeichen von $f(u) - f(x)$ wird bestimmt durch $a(u-x)^n$.

Berechnung von Grenzwerten

Wir berechnen den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \log(1+x)}{(1-\cos x)\sin x}$$

dadurch, daß wir auftauchende Funktion durch Taylorpolynome ersetzen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(x+O(x^3))}{(1-1+\frac{x^2}{2}+O(x^4))(x+O(x^3))}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3+O(x^4)}{\frac{x^3}{2}+O(x^5)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+O(x)}{\frac{1}{2}+O(x^2)} = 2$$

Funktionen in zwei Variablen

Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$. Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Partielle Funktionen erhält man durch Einsetzen von $x = a$ oder $y = b$:

$$f_{x=a} : D_{x=a} \to \mathbb{R}, y \mapsto f(a, y)$$
$$f_{y=b} : D_{y=b} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x, b)$$

Der Graph einer Funktion in zwei Variablen

Der Graph der Funktion f ist die Menge der Punkte $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, die die Gleichung $z = f(x, y)$ erfüllen.

Die Parameterlinien sind die Menge der Punkte des Graphen mit fester x-bzw. y-Koordinate. Man kann sie deuten als Graphen der partiellen Funktionen.

Wenn man die Menge der Punkte des Graphen mit fester z-Koordinate in die xy-Ebene projiziert, erhält man die Niveaulinien.

Folgen und Stetigkeit im $\mathbb{R}^2$

Es sei $(a_n, b_n)_n$ eine Folge von Punkten in der Ebene. Die Folge heißt konvergent, wenn beide Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergieren. Der Grenzwert der Folge ist der Punkt $(\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n)$.

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt (a, b), wenn für jede Folge $(a_n, b_n)_n$, die gegen (a, b) konvergiert, die Folge der Funktionswerte $(f(a_n, b_n))_n$ gegen $f(a, b)$ konvergiert. Die Funktion heißt stetig, wenn sie in jedem Punkt $p \in D$ stetig ist.

Stetigkeit

Die Funktionen $+$, $\cdot$, $/$ sind stetig im Definitionsbereich.

Die Hintereinanderausführung von stetigen Funktionen ist wieder stetig.

Wenn f stetig ist, dann sind auch die partiellen Funktionen stetig. Es gibt aber auch Funktion, deren partielle Funktionen stetig sind, und die trotzdem unstetig sind.

Partielle Ableitungen

Die partiellen Ableitungen sind die definiert als die Ableitungen der partiellen Funktionen.

Schreibweise: statt $(t \to f(t,y))'(x)$ schreibt man $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ oder $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$.

Differenzierbarkeit

Direkte Verallgemeinerung von Folie 54 ist nicht möglich. Bei einer differenzierbaren Funktion in einer Variablen gibt es jedoch eine lineare Approximation, und dieses Konzept ist verallgemeinerbar.

Definition: Die Funktion $f : D \subset \mathbb{R}$ heißt bei (x, y) differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt, sodaß der Grenzwert

$$\lim_{(u,v)\to(x,y)} \frac{f(u,v) - f(x,y) - L(u-x, v-y)}{\sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2}}$$

existiert und gleich Null ist. Die lineare Abbildung L heißt Ableitung von f bei (x, y).

Beispiel

Konstante und lineare Abbildungen sind differenzierbar, in diesem Fall ist der Grenzwert konstant Null.

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$ überall differenzierbar, und die Ableitung ist $(u, v) \to uy + vx$:

Beispiel

$$\lim_{(u,v)\to(x,y)} \frac{uv - xy - ((u-x)y + (v-y)x)}{\sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2}}$$

$$= \lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{(x+s)(y+t) - xy - (sy + tx)}{\sqrt{s^2+t^2}} = \lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{st}{\sqrt{s^2+t^2}}$$

Da $|st| \leq \frac{s^2+t^2}{2}$ gilt für alle $s, t \in \mathbb{R}$, ist die Funktion nach dem Limes ein $O(\sqrt{s^2+t^2})$ und hat den Grenzwert 0.

Zusammenhang mit den partiellen Ableitungen

Satz. Wenn $f : D \to \mathbb{R}$ im Punkt (x, y) differenzierbar ist, dann existieren die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ und $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, und die totale Ableitung ist

$$(u, v) \mapsto \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} u + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} v.$$

Die Umkehrung gilt nicht

Beispiel. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ hat im Punkt $(0,0)$ partielle Ableitungen, weil die partiellen Funktionen gleich 0 sind. Der Grenzwert

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|uv|}}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

existiert aber nicht, wie man mit der Verwendung der Folgen $(1/n,0)_n$ und $(1/n,1/n)_n$ sehen kann.

Umkehrung mit stärkerer Voraussetzung

Satz. Wenn beide partielle Ableitungen in einer Umgebung von (x, y) existieren und stetig sind, dann ist f an der Stelle (x, y) differenzierbar.

Im obigen Beispiel existiert die partielle Ableitung $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ nicht für $x = 0$, $y \neq 0$.

Die Tangentialebene

Der Graph der linearen Approximation ist Tangentialebene an den Graph der Funktion. In Symbolen: Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$. Es sei $f : D \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ differenzierbar. Dann ist

$$\{(x, y, z) \mid z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)\}$$

Tangentialebene an den Graphen $\{(x, y, z) \mid z = f(x, y)\}$ im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Die Kettenregel

Es seien $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, $g_1 : D_1 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, und $D_2 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist $h := f \circ (g_1, g_2) : t \mapsto f(g_1(t), g_2(t))$ differenzierbar in ihrem Definitionsbereich, und es gilt

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(g_1(t), g_2(t))g_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g_1(t), g_2(t))g_2'(t)$$

Beispiel: die Quotientenregel

Wir setzen $F(x, y) = \frac{x}{y}$. Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}, \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}.$$

Nach der Kettenregel gilt

$$\frac{d\frac{g_1(t)}{g_2(t)}}{dt} = \frac{1}{g_2(t)} g_1'(t) - \frac{g_1(t)}{g_2(t)^2} g_2'(t)$$

Die Richtungsableitung

Es sei $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Es sei (x, y) ein innerer Punkt von D. Es sei $v = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor der Länge 1, i.e. $p^2 + q^2 = 1$. Die Richtungsableitung von f bei (x, y) in Richtung v ist definiert als die Ableitung der Funktion $t \mapsto f(x + tp, y + tq)$ an der Stelle $t = 0$.

Die Richtungsableitung

Nach der Kettenregel ist die Ableitung gleich

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x+tp, y+tq)p + \frac{\partial f}{\partial y}(x+tp, y+tq)q,$$

und die Richtungsableitung ist

$$\partial_v f = \frac{\partial f}{\partial x}p + \frac{\partial f}{\partial y}q.$$

Der Gradient

Den Vektor $\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$ nennen wir Gradient von f bei (x, y), geschrieben $\nabla f(x, y)$. Damit läßt sich die Richtungsableitung als Skalarprodukt

$$\partial_v f = \langle \nabla f, v \rangle$$

Der Gradient ist Normalvektor der Niveaulinie durch (x, y). Wenn v tangential zur Niveaulinie ist, ist die Richtungsableitung 0. Die größte Richtungsableitung ist die in Richtung des Gradienten; diese Beobachtung wird verwendet bei numerischen Verfahren zur Optimierung.

Optimierung

Wenn f an der Stelle (x, y) ein lokales Maximum/Minimum hat, dann muß der Gradient notwendigerweise 0 sein. Die Umkehrung gilt nicht, wie das Beispiel $f(x, y) = xy$ zeigt.

Für Funktionen in einer Variablen ist

$$f'(x) = 0, f''(x) < 0$$

eine notwendige Bedingung für ein Maximum. Ein ähnliches Kriterium für lokale Extreme in zwei Variablen wäre nützlich!

Optimierung

Vielleicht:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0, \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} < 0, \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} < 0?$$

Dann hätten die partiellen Funktionen auf jeden Fall ein Maximum.

Optimierung

Gegenbeispiel: $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy$.

Man muß auch die gemischte partielle Ableitung $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$ verwenden.

Gleichheit gilt nach dem Satz von Schwarz, unter der Voraussetzung daß alle zweiten Ableitungen stetig sind.

Optimierung für quadratische Funktionen

Es sei $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2a, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = b, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2c.$$

Optimierung für quadratische Funktionen

Der Nullpunkt ist ein striktes Minimum, wenn $f(x,y) > 0$ ist für $(x,y) \neq (0,0)$. Das geht nur für $a > 0$. Unter Verwendung von $a > 0$ folgt

$$0 < 4a(ax^2 + bxy + cy^2) = (2ax + by)^2 + (4ac - b^2)y^2,$$

und das gilt für alle $(x,y) \neq (0,0)$ dann und nur dann wenn $4ac - b^2 > 0$ ist. Dieser Ausdruck ist gleich der Determinante der Matrix

$$\begin{bmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{bmatrix}$$

Die Hessesche Matrix

Es sei $f : D \subset \mathbb{R}^2$ zweimal stetig differenzierbar, und (x, y) ein innerer Punkt von D. Die Hessesche Matrix von f bei (x, y) ist definiert als

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{bmatrix}$$

Die Hessesche Matrix

Die quadratische Approximation (auch: das Taylorpolynom zweiter Ordnung) von f bei (x, y) ist definiert als

$$f(x+s, y+t) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} s + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} t$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} s^2 + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} st + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} t^2$$
$$= f(x, y) + f'(x, y) \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \left\langle \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}, H_f \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \right\rangle .$$

Ein hinreichendes Kriterium für Minima

Wenn $\nabla f(x,y) = \vec{0}$ und $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} > 0$ und $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} > 0$ und $\det(H_f(x,y)) > 0$, dann hat f bei (x,y) ein lokales Minimum.

Die Bedingung an die zweiten partiellen Ableitungen ist equivalent dazu, daß $H_f(x,y)$ positiv definit ist.

Der Beweis geht ähnlich wie im univariaten Fall. Die wesentliche Idee ist, daß das Vorzeichen von $f(u,v) - f(x,y)$ nur von der quadratischen Approximation abhängt, wenn die Determinante der Hesseschen Matrix ungleich Null ist.

Ein hinreichendes Kriterium für Maxima

Wenn $\nabla f(x,y) = \vec{0}$ und $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} < 0$ und $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} < 0$ und $\det(H_f(x,y)) > 0$, dann hat f bei (x,y) ein lokales Maximum.

Die Bedingung an die zweiten partiellen Ableitungen ist equivalent dazu, daß $H_f(x,y)$ negativ definit ist.

Sattelpunkte

Wenn $\nabla f(x, y) = \vec{0}$ und $\det(H_f(x, y)) < 0$ gilt, liegt ein Sattelpunkt vor, und kein lokales Optimum.

Wenn $\det(H_f(x, y)) = 0$ ist, dann reicht die quadratische Approximation nicht aus, um festzustellen, ob ein lokales Optimum vorliegt.