Dezimalzahlen

Definition. Eine endliche Dezimalzahl besteht aus
- einem Vorzeichen $+$, $-$, oder 0
- einer natürlichen Zahl d_0
- einer endlichen Folge von Ziffern $d_1, \ldots, d_l$ von 0 bis 9.

Die Länge l kann auch 0 sein.
Einschränkungen:
- $d_l \neq 0$
- Das Vorzeichen ist dann und nur dann 0, wenn $d_0 = l = 0$ ist.

Dezimalzahlen

Eine unendliche Dezimalzahl besteht aus
- einem Vorzeichen $+$, $-$, oder 0
- einer natürlichen Zahl d_0
- einer unendlichen Folge von Ziffern $d_1, d_2, d_3, \ldots$ von 0 bis 9.

Einschränkungen:
- Die Folge endet nicht mit einer Serie von 9-Ziffern.
- Das Vorzeichen ist dann und nur dann 0, wenn $d_i = 0$ ist für alle i.

Reelle und Rationale Zahlen

Definition. Eine reelle Zahl ist eine unendliche Dezimalzahl.

Die rationalen Zahlen sind die gemischt periodischen Dezimalzahlen (dabei wird eine endliche Dezimalzahl, aufgefüllt mit Ziffern 0, ebenfalls als periodisch angesehen).

Die Ordnungsrelation

Definition. Es seien $+a_0.a_1a_2\dots$ und $+b_0.b_1b_2\dots$ zwei reelle Zahlen mit Vorzeichen $+$. Wir sagen $a < b$, wenn es ein ein i gibt, sodaß $a_j = b_j$ für alle $j < i$ und $a_i < b_i$ gilt.
Es seien $-a_0.a_1a_2\dots$ und $-b_0.b_1b_2\dots$ zwei reelle Zahlen mit Vorzeichen $+$. Wir sagen $a < b$, wenn es ein ein i gibt, sodaß $a_j = b_j$ für alle $j < i$ und $a_i > b_i$ gilt.
Falls a und b unterschiedliche Vorzeichen haben, entscheidet das Vorzeichen nach der Regel $- < 0 < +$.

Die Ordnungsrelation $<$ ist transitiv. Außerdem handelt es sich um eine totale Ordnung, d.h. für zwei Zahlen gilt genau eine der drei Fälle $a < b$, $a = b$, oder $b < a$.

Weitere Definitionen zur Ordnung

Man definiert:
$a > b$ heißt $b < a$
$a \leq b$ heißt $a < b$ oder $a = b$.
$a \geq b$ heißt $a > b$ oder $a = b$.

$[a, b] := \{x \mid a \leq x \leq b\}$
$(a, b] := \{x \mid a < x \leq b\}$
$[a, b) := \{x \mid a \leq x < b\}$
$(a, b) := \{x \mid a < x < b\}$
$(-\infty, b) := \{x \mid x < b\}$
$(-\infty, b] := \{x \mid x \leq b\}$
$(a, \infty) := \{x \mid a < x\}$
$[a, \infty) := \{x \mid a \leq x\}$

Fallstricke

In einer Übungsaufgabe ist eine bijektive Abbildung $f : [0, 1] \to (0, 1)$ anzugeben. Eine typische Lösung sieht so aus:

Es sei α die kleinste positive Zahl. Es sei β die größte Zahl kleiner als 1. Wir definieren

$$f(x) = \alpha + (\beta - \alpha)x$$

Wahr ist vielmehr: Es gibt keine kleinste positive Zahl (und auch keine größte Zahl kleiner als 1).

Fallstricke

Man kann beweisen, daß zwischen zwei verschiedenen nicht-rationalen Zahlen eine rationale Zahl liegt. Außerdem kann man auch beweisen, daß zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen eine nicht-rationale Zahl liegt.

Also wechseln rationale und nicht-rationale Zahlen einander ab. Es gibt daher gleich viele rationale wie nicht-rationale Zahlen.

Wahr ist vielmehr: Die Menge der nicht-rationalen Zahlen ist überabzählbar und damit mächtiger als die Menge der rationalen Zahlen, die “nur” abzählbar ist.

Arithmetische Operationen

Die genaue Definition der Operationen $+, \cdot : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $/ : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$ mit Dezimalzahlen ist zwar möglich, aber umständlich. Die rechnerische Durchführung kann wohl vorausgesetzt werden. Es gelten eine Reihe von Regeln:

Kommutativgesetz: $a + b = b + a$, $ab = ba$
Assoziativgesetz: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(ab)c = a(bc)$
Neutrales Element: $a + 0 = a$, $1 \cdot a = a$
Distributivgesetz: $(a + b)c = ac + bc$
Division: $(a/b)b = a$, $(ab)/b = a$ falls $b \neq 0$
$a < b \Rightarrow a + c < b + c$
$a < b, c > 0 \Rightarrow ac < bc$
$a < b, c < 0 \Rightarrow ac > bc$

Darstellungen am Computer

Maschinenzahlen in einfacher Genauigkeit bestehen aus 32 bits, nämlich
1 Vorzeichenbit $v \in \{0, 1\}$
8 bits für den Exponent e, eine ganze Zahl in (-128,128)
23 bits für die Mantisse M, eine endliche Binärzahl in [1,2)
Die dargestellte Zahl ist $(-1)^v 2^e M$.

Maschinenzahlen in doppelter Genauigkeit verwenden 11 bits für den Exponent und 52 bits für die Mantisse.

Beim Rechnen mit Maschinenzahlen treten meistens Rundungsfehler auf und selten gröbere Fehler, etwa Überläufe oder Division durch eine Zahl die nur wegen Rundungsfehlern ungleich Null ist.

Funktionen

Wir untersuchen Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$, wobei D meist ein Intervall der Form $[a, b]$, $(a, b]$ etc. ist, oder $D = \mathbb{R}$. Viele solche Funktionen lassen sich aus der Ordungsrelation und aus den arithmetischen Operationen konstruieren:

$$\mathrm{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto = \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases},$$

$$|\_| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} -x & \text{falls } x < 0 \\ x & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

Funktionen

Lineare Funktionen sind Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Art

$$x \mapsto ax + b,$$

wobei a, b reelle Parameter sind. Quadratische Funktionen sind Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Art

$$x \mapsto ax^2 + bx + c,$$

mit drei reellen Parametern a, b, c.

Potenzfunktionen mit ganzem Exponent

Das sind Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für positives n bzw. $(\mathbb{R} - \{0\}) \to \mathbb{R}$ für positives n, die definiert sind durch

$$(\_)^0 : x \mapsto 1$$

$$(\_)^n : x \mapsto x^{n-1}x \text{ falls } n > 0$$
$$(\_)^n : x \mapsto x^{n+1}/x \text{ falls } n < 0$$

Es gelten die Regeln

$$(xy)^n = x^n y^n, x^{m+n} = x^m y^n, (x^m)^n = x^{mn}$$

Funktionen

Andere Funktionen lassen sich nicht durch aus den arithmetischen Relationen konstruieren, und die wir auch jetzt noch nicht genau definieren können. Dazu gehören Potenzfunktionen mit reellem Exponent α

$$(\_)^{\alpha} : (0, \infty) \to \mathbb{R},$$

die Exponentialfunktion

$$b^{-} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

wobei die Bases ein positiver reeller Parameter ist, und deren "Umkehrfunktion"

$$\log_b : (0, \infty) \to \mathbb{R}.$$

Exkurs über Umkehrfunktionen

Eigentlich ist die Exponentialfunktion nicht surjektiv und besitzt daher auch keine Umkehrfunktion. Bei einer injektiven Funktion $f : A \to B$ kann man aber den Bildbereich auf den Wertebereich $W = f(A)$ einschränken und hat dann Bijektivität, und es existiert eine eindeutige Umkehrfunktion $f^{-1} : W \to A$.

Regeln

Die Potenzregeln oben gelten auch für reelle Exponenten. Insbesondere ist die Potenzfunktion mit Exponent $1/\alpha$ Umkehrfunktion der Potenzfunktion mit Exponent α:

$$(x^\alpha)^{1/\alpha} = \sqrt[\alpha]{x^\alpha} = x \text{ falls } x > 0$$

$$\log_b(b^x) = x, b^{\log_b(x)} = x \text{ falls } x > 0$$
$$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y) \text{ falls } x, y > 0$$
$$\log_b(x^a) = a \log_b(x) \text{ falls } x > 0$$

Der natürliche Logarithmus

Es gilt die Regel

$$\log_c(x) = \log_b(x)/\log_b(c) \text{ falls } b, c, x > 0.$$

Daher reicht es, die Logarithmen zu einer fixen Basis zu kennen.
Die bevorzugte Basis ist

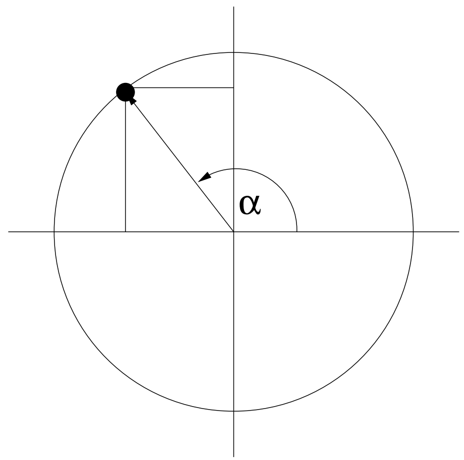
$$e = 2.718281828459045235 4\ldots$$

und man schreibt auch $\log(x)$ für $\log_e(x)$.

Winkelfunktionen

In der Analysis wird der Winkel im Bogenmaß angegeben, d.h. eine volle Umdrehung ist $2\pi = 6.2831853071795864770\ldots$.

Die Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind definiert als y- und x-Koordinate des Punktes mit Abstand 1 zum Nullpunkt in Abhängigkeit des Peilwinkels α:



Koordinaten des Punktes: $(\cos\alpha, \sin\alpha)$
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Winkelfunktionen

Die Tangens- und Kotangens-Funktion sind definiert durch

$$\tan(x) = \sin(x)/\cos(x),\ \cot(x) = \cos(x)/\sin(x)$$

für alle x bei denen der Nenner nicht Null ist. Insbesondere ist $\tan$ im Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ definiert.

Die Winkelfunktionen $\sin$ und $\cos$ sind periodisch mit Periode 2π:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x),\ \cos(x + 2\pi) = \cos(x).$$

Die Winkelfunktionen $\tan$ und $\cot$ sind periodisch mit Periode π:

$$\tan(x + \pi) = \tan(x),\ \cot(x + \pi) = \cot(x).$$

Zyklometrische Funktionen

Dies sind die “Umkehrfunktionen” von $\sin$, $\cos$, $\tan$, und $\cot$. Diese Winkelfunktionen sind nicht injektiv, drum muß man sie vorher einschränken auf ein geeignetes Intervall auf dem sie injektiv sind. Dieses Intervall wird dann zum Wertebereich der “Umkehrfunktionen”.

$$\arcsin : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad \text{Wertebereich } [-\pi/2, \pi/2]$$

$$\arccos : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad \text{Wertebereich } [0, \pi]$$

$$\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \text{Wertebereich } (-\pi/2, \pi/2)$$

$$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \text{Wertebereich } (0, \pi)$$

Komplexe Zahlen

Der komplexe Zahlenraum $\mathbb{C}$ ist ein zwei-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$, auf dem eine Multiplikation definiert ist durch

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Es gelten das Kommutativ-, Assoziativ-, und Distributivgesetz.

Das neutrale Element ist $(1, 0)$. Der Unterraum bestehend aus den Zahlen der Form $(a, 0)$ ist abgeschlossen bezüglich Addition und Multiplikation und wird mit $\mathbb{R}$ identifiziert, d.h. a entspricht $(a, 0)$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Für jede komplexe Zahl (a, b)

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi \text{ wobei } i := (0, 1)$$

Betrag und Argument

Es sei $z = (a, b)$ eine komplexe Zahl. Dann heißt a Realteil von z, b Imaginärteil von z, und $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ Betrag von z. Der Betrag ist natürlich auch der Abstand des Punktes (a, b) vom Nullpunkt in der Koordinatenebene.

Falls $z \neq 0$, so heißt der Peilwinkel des Punktes Argument:

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan(b/a) & \text{falls } a > 0 \\ -\pi + \arctan(b/a) & \text{falls } a < 0, b < 0 \\ \pi + \arctan(b/a) & \text{falls } a < 0, b \geq 0 \\ \phi = \pi/2 & \text{falls } a = 0, b > 0 \\ \phi = -\pi/2 & \text{falls } a = 0, b < 0 \end{cases}$$

Division

Falls $z = a + bi$, so heißt $\overline{z} := a - bi$ die konjugierte Zahl, und es gilt $z\overline{z} = |z|^2$. Wenn $z \neq 0$ ist, gilt daher $z \cdot \frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1$, also $1/z = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$: man kann durch z dividieren.

Multiplikation in Polarkoordinaten

Es seien z_1 und z_2 komplexe Zahlen ungleich 0. Dann gilt

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \; |z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|,$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2), \; \arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2),$$

wobei auf der rechten Seite 2π addiert bzw. subtrahiert werden muss, wenn das Ergebnis nicht in $(-\pi, \pi]$ liegt.

Die komplexe Exponentialfunktion

Für $z = a + bi$ definieren wir

$$e^z := e^a(\cos(b) + i\sin(b)).$$

Die Regel $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ gilt auch im komplexen.

Eine “Umkehrfunktion” ist

$$z \mapsto \log(z) := \log(|z|) + i\arg(z)$$

für $z \neq 0$; es gilt

$$e^{\log z} = z \text{ falls } z \neq 0,$$
$$\log(e^z) = z \text{ falls } \mathrm{Im}(z) \in (-\pi, \pi].$$

Folgen

Eine unendliche Folge von reellen Zahlen ist definiert als eine Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$. Statt $n \mapsto a(n)$ ist die Schreibweise $(a_n)_n$ gebräuchlich; zum Beispiel ist $(1/n)_n$ die Folge $n \mapsto 1/n$ oder $(1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots)$.

Es sei $(a_n)_n$ eine Folge, a eine reelle Zahl. Wir sagen: "$(a_n)_n$ konvergiert gegen a" oder "a ist Grenzwert von $(a_n)_n$" oder $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, wenn die Folge für wachsendes n dem Wert a beliebig nahe kommt und auch nahe bleibt: für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein N, sodaß $n > N \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon$.

Grenzwerte

Eine Folge kann höchstens einen Grenzwert haben (sonst wäre die Schreibweise $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ auch widersprüchlich). Es gibt aber auch Folgen ohne Grenzwert; man nennt sie divergent.

Zum Beispiel hat die Folge $(n)_n$ keinen Grenzwert, weil sie über alle Schranken wächst. Die Folge $((-1)^n)_n$ hat keinen Grenzwert, weil sie unendlich oft hin und her springt.

Grenzwerte

Eine Folge $(a_n)_n$ heißt monoton wachsend/fallend, falls $a_n \leq a_{n+1}$ bzw. $a_n \geq a_{n+1}$ gilt für alle n.

Eine Zahl M heißt obere/untere Schranke der Folge $(a_n)_n$, falls $a_n \leq M$ bzw. $a_n \geq M$ gilt für alle n. Eine Folge heißt nach oben/unten beschränkt, wenn sie eine obere/untere Schranke besitzt. Eine Folge heißt beschränkt, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Satz. Jede monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge ist konvergent.

Grenzwerte

Umgekehrt ist jede konvergente Folge beschränkt, muß aber nicht monoton wachsend oder monoton fallend sein. Das zeigt das Beispiel $((-1)^n/n)_n$.

Grenzwertregeln

Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei konvergente Folgen, und λ eine reelle Zahl. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n)$$

Falls $b_n \neq 0$ für alle n und $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, dann auch

$$\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)/(\lim_{n\to\infty} b_n)$$

Anwendung der Grenzwertregeln

Wir berechnen den Grenzwert der Folge $\left(\frac{n^2+2n+3}{2n^2+4}\right)_n$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n+3}{2n^2+4}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2/n+3/n^2}{2+4/n^2}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty}(1+2/n+3/n^2)}{\lim_{n\to\infty}(2+4/n^2)}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} 2/n + \lim_{n\to\infty} 3/n^2}{\lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} 4/n^2} = \frac{1+0+0}{2+0} = \frac{1}{2}$$

Reihen

Es sei $(a_n)_n$ eine Folge. Dann wird die Folge der Summen definiert durch

$$S_1 := a_1,\ S_{n+1} := S_n + a_{n+1} \text{ oder } S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Eine solche Folge heißt Reihe (über $(a_n)_n$). Falls sie konvergiert, schreiben wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Das ist nur dann möglich wenn $(a_n)_n$ den Grenzwert Null hat.

Teleskopreihen

Es sei $(b_n)_n$ eine Folge, und $(a_n)_n := (b_{n+1} - b_n)_n$ die Folge der Differenzen aufeinanderfolgender Glieder. Es sei $(S_n)_n$ die Reihe über $(a_n)_n$. Dann gilt

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1,$$

und die Reihe konvergiert wenn die Folge b_n konvergiert.

Beispiel: $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}, \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Die geometrische Reihe

Es sei $q \in \mathbb{R}$. Die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt geometrische Folge (es ist in diesem Fall günstig, mit dem Index 0 zu beginnen). Die dazugehörige Reihe heisst geometische Reihe, und es gilt

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Die geometrische Reihe ist konvergent genau dann wenn $|q| < 1$ ist. In diesem Fall ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Die harmonische Reihe

Es sei $(S_n)_n$ die Reihe über $(1/n)_n$. Dann gilt für alle n

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

und daher $S_{2^m n} \geq S_n + \frac{m}{2}$ für alle $m \in \mathbb{N}$, insbesondere

$$S_{2^m} \geq \frac{m}{2} + S_1 = \frac{m}{2} + 1.$$

Die Reihe ist also unbeschränkt und daher divergent.

Das Majorantenkriterium

Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ positive Folgen sodaß $a_n \leq b_n$ gilt für alle n. (Die Reihe über $(b_n)_n$ heißt dann Majorante über der Reihe in $(a_n)_n$. Dann gilt:

Wenn die Reihe über $(b_n)_n$ konvergiert, dann konvergiert auch die Reihe über $(a_n)_n$.

Anwendung des Majorantenkriteriums

Die Reihe $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i+1}$ ist konvergent, da sie die geometrische Reihe mit $q = \frac{1}{2}$ als Majorante hat.

Die Reihe $\sum_{i=0}^{n} \frac{i}{i^2-1}$ ist nicht konvergent, da sie selbst Majorante der harmonischen Reihe ist.

Die Exponentialreihe

Wir sind jetzt in der Lage, die Exponentialfunktion zu definieren:

$$e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

$$e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{1} + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

Weitere Reihen

Die $\log$-Funktion erhält man dann als Umkehrfunktion von e^{-}, und die restlichen Potenz- und Exponentialfunktionen erhält man durch
$a^b = e^{\log(a)b}$.

$$\sin(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \pm \ldots$$

$$\cos(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \pm \ldots$$

Die Zahl $\pi := 3.14159265358979323 85\ldots$ kann nun definiert werden als die kleinste positive Nullstelle der Funktion $\sin$.