Stetigkeit von Funktionen

Definition. Es sei D ein Intervall oder $D = \mathbb{R}$, $x \in D$, und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen f ist stetig wenn für alle Folgen $(x_n)_n$ in D mit Grenzwert x auch die Folge der Funktionswerte $(f(x_n))_n$ konvergiert.

Zum Beispiel sind alle Funktionen, die aus den arithmetischen Operationen gebildet werden können, stetig (Folgerung aus den Grenzwertsätzen). Die Exponentialfunktion, Potenzfunktion, Logarithmus- Funktion, Winkelfunktionen und zyklometrischen Funktionen sind ebenfalls überall im Definitionsbereich stetig.

Sprungstellen

Die Funktion sign ist nicht stetig in 0: die Folge $((-1)^n/n)_n$ konvergiert gegen Null, aber die Folge der Funktionswerte ist $(-1, 1, -1, 1, \dots) = ((-1)^n)_n$ ist divergent. Wenn wir uns allerdings auf positive Folgen einschränken, existiert der Grenzwert (und ist gleich $+1$).

Wir sagen f hat bei x einen rechtsseitigen Grenzwert a, wenn für alle Folgen $(x_n)_n$ in D mit $x_n > x$ mit Grenzwert x auch die Folge der Funktionswerte $(f(x_n))_n$ konvergiert:

$$\lim_{y \to x_+} f(y) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$$

Sprungstellen

Der linksseitige Grenzwert ist analog definiert. Die Funktion sign hat bei 0 den linksseitigen Grenzwert -1 und den rechtsseitigen Grenzwert $+1$.

Eine Funktion ist genau dann stetig bei x, wenn rechtsseitiger Grenzwert und linkswertiger Grenzwert beide existieren, übereinstimmen, und mit dem Funktionswert bei x übereinstimmen.

Stetige Fortsetzung

Wenn die Funktion f an der Stelle x_0 nicht definiert ist, aber der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert existieren und übereinstimmen, wird dieser Wert als Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x)$ bezeichnet. Dann ist f stetig fortsetzbar in x_0.

Beispiel: $f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x}{x}$ kann in $x = 0$ durch $f(0) := -1$ stetig fortgesetzt werden, denn

$$\lim_{x \to 0_+} f(x) = \lim_{x \to 0_-} f(x) = -1$$

Andere Unstetigkeiten

Senkrechte Asymptote: Wenn die Funktion in der Nähe von x nicht beschränkt ist, kann sie nicht in x stetig fortgesetzt werden. Beispiel: $x \mapsto \frac{1}{x}$ an der Stelle 0.

Oszillation: Die Funktion $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ schwankt in der Nähe von 0 unendlich oft zwischen $+1$ und -1 hin und her und ist daher auch nicht in 0 fortsetzbar.

Hingegen ist die Funktion $x \mapsto x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sehr wohl in 0 fortsetzbar, nämlich durch den Wert 0.

Grenzwertregeln für Funktionen

Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Es seien $f, g : \mathbb{R}\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, und λ eine reelle Zahl. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = (\lim_{x \to x_0} f(x))(\lim_{x \to x_0} g(x))$$

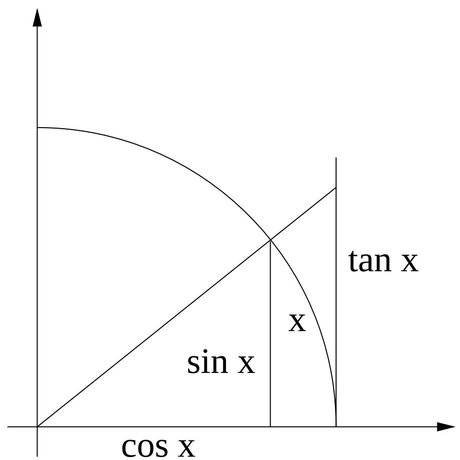
Falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \neq x_0$ und $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, dann auch

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(x_0 + h)$$

Ein trigonometrischer Grenzwert

Durch Vergleich der Flächeninhalte kleines Dreieck / Kreisausschnitt / großes Dreieck erhält man für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ die Ungleichung



$$\frac{1}{2}\sin x \cos x \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2}\tan x$$

Ein trigonometrischer Grenzwert

Durch umformen (Division durch $\sin x$, Kehrwert) erhalten wir

$$\cos(x) \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

Weil $x \mapsto \cos x$ und $x \mapsto \frac{1}{\cos x}$ beide bei Null stetig sind und den Wert 1 haben, existiert der Grenzwert der Funktion in der Mitte:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(Die Funktion $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ ist bei $x = 0$ stetig fortsetzbar.)

Der Zwischenwertsatz

Satz. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) < 0$, und $f(b) > 0$. Dann existiert $c \in (a, b)$ sodaß $f(c) = 0$ gilt.

Das Bisektionsverfahren

Gegeben: Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ststig, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$.

Ausgabe: Eine Nullstelle $c \in (a, b)$, oder eine Folge in $[a, b]$, die gegen eine Nullstelle konvergiert.

schreibe a als erstes/nächstes Glied auf die Ausgabefolge
if $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ then
    Nullstelle gefunden; Ausgabe von $\frac{a+b}{2}$
else if $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$ then
        $a_1 := \frac{a+b}{2}$; $b_1 := b$;
    else
        $a_1 := a$; $b_1 := \frac{a+b}{2}$;
    rekursiver Aufruf mit $f : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}$

Beweis der Korrektheit

Wenn das Verfahren terminiert, dann ist jedenfalls eine Nullstelle gefunden. Wenn nicht, so definiert das Verfahren eine monoton wachsende Folge $(a_n)_n$. Sie ist beschränkt, also konvergent wegen dem Satz auf Seite 27.

Fortsetzung Beweis

Um zu zeigen, daß der Grenzwert eine Nullstelle von f ist, konstruieren wir analog die Folge $(b_n)_n$ der oberen Intervallgrenzen. Diese Folge ist monoton fallend und ebenfalls beschränkt. Die Folge der Differenzen $(b_n - a_n)_n$ ist eine geometrische Folge mit $q = 1/2$, sie hat der Grenzwert 0, und es folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: c$$

Nach Konstruktion ist $f(a_n) < 0$ und $f(b_n) > 0$ für alle n. Also ist

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}(f(b_n)) = f(c) = \lim_{n\to\infty}(f(a_n)) \leq 0$$

Die Ableitung: dynamische Interpretation

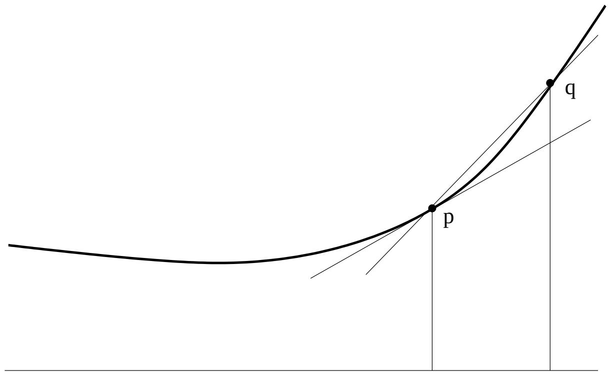
Angenommen, die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschreibt eine Bewegung: das Intervall $[a, b]$ ist ein Zeitintervall, und $f(t)$ ist der Ort eines Punktes zum Zeitpunkt t. Dann ist $f'(t)$ die momentane Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t.

Es sei $t < s \leq b$. Die durchschnittliche Geschwindigkeit im Zeitintervall $[t, s]$ beträgt $\frac{f(s)-f(t)}{s-t}$. Man erhält die Momentangeschwindigkeit als Grenzwert

$$f'(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(s) - f(t)}{s - t}.$$

Die Ableitung: geometrische Interpretation

Der Graph einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist eine Kurve in der Ebene. Die Ableitung $f'(x)$ ist die Steigung der Tangente an die Kurve im Punkt $p := (x, f(x))$.



Die Steigung der Geraden durch zwei Kurvenpunkte p und $q := (u, f(u))$ ist gleich $\frac{f(u)-f(x)}{u-x}$, also ist wieder

$$f'(x) = \lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x}.$$

Streng mathematisch

Definition. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x \in [a, b]$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x}$$

existiert (m.a.W.: wenn die Funktion $u \mapsto \frac{f(u)-f(x)}{u-x}$ in x stetig fortsetzbar ist). Der Grenzwert heißt Ableitung von f bei x und wird mit $f'(x)$ bezeichnet.

Falls f in allen Stellen $x \in [a, b]$ differenzierbar ist, dann nennen wir f differenzierbar und die Funktion $f' : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$ die Ableitung von f.

Ableitung der konstanten Funktionen

$$\lim_{u \to x} \frac{c - c}{u - x} = \lim_{u \to x} 0 = 0$$

Die Ableitung der konstanten Funktion $x \mapsto c$ ist die konstante Nullfunktion $x \mapsto 0$.

Ableitung der linearen Funktionen

$$\lim_{u \to x} \frac{au + b - ax - b}{u - x} = \lim_{u \to x} a = a$$

Die Ableitung der linearen Funktion $x \mapsto ax + b$ ist die konstante Funktion $x \mapsto a$.

Ableitung von $x \mapsto x^2$

$$\lim_{u \to x} \frac{u^2 - x^2}{u - x} = \lim_{u \to x} (u + x) = 2x$$

Die Ableitung der Funktion $x \mapsto x^2$ ist die lineare Funktion $x \mapsto 2x$.

Ableitung von $x \mapsto \sqrt{x}$

$$\lim_{u \to x} \frac{\sqrt{u} - \sqrt{x}}{u - x} = \lim_{u \to x} \frac{1}{\sqrt{u} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

falls $x > 0$.

Im Intervall $(0, \infty)$ ist die Ableitung der Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ die Funktion $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Die Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ ist an der Stelle 0 nicht differenzierbar. Die Tangente an den Graphen ist senkrecht, Steigung ∞.

Ableitung der Sinusfunktion

Wir ersetzen u durch $x+h$ (letzte Grenzwertregel auf Seite 44).

$$\lim_{h\to\infty}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \lim_{h\to\infty}\frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to\infty}\frac{\cos(h)-1}{h}\sin(x)+\lim_{h\to\infty}\frac{\sin(h)}{h}\cos(x) = \cos'(0)\sin(x)+\sin'(0)\cos(x) = \cos(x$$

Die Ableitung der Funktion $x \to \sin(x)$ ist die Funktion $x \to \cos(x)$.

Ableitung der Cosinusfunktion

Wir ersetzen u durch $x + h$.

$$\lim_{h \to \infty} \frac{\cos(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \to \infty} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \to \infty} \frac{\cos(h) - 1}{h} \cos(x) - \lim_{h \to \infty} \frac{\sin(h)}{h} \sin(x) = \cos'(0)\cos(x) - \sin'(0)\sin(x) = -\sin$$

Die Ableitung der Funktion $x \to \cos(x)$ ist die Funktion $x \to -\sin(x)$.

Ableitung der Exponentialfunktion

Wir ersetzen u durch $x + h$.

$$\lim_{h\to\infty} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to\infty} \frac{e^x e^h - e^x}{h} =$$

$$\lim_{h\to\infty} \frac{e^h - 1}{h} e^x = 1 \cdot e^x = e^x.$$

Die Ableitung der Funktion $x \to e^x$ ist wieder die Funktion $x \to e^x$.

Nicht differenzierbare Funktionen

Wir haben schon ein Beispiel gesehen (senkrechte Tangente).