Nicht differenzierbare Funktionen

Wir haben schon ein Beispiel gesehen (senkrechte Tangente).

Differenzierbare Funktionen sind stetig wegen den Grenzwertregeln:

$$0 \cdot f'(x) + f(x) = \lim_{u \to x} (u - x) \lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} + \lim_{u \to x} f(x) = \lim_{u \to x} f(u)$$

Also sind unstetige Funktionen nicht differenzierbar.

Die Betragfunktion $x \mapsto |x|$ ist nicht differenzierbar bei 0, da der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert nicht übereinstimmen (Knickpunkt).

Linearität der Ableitung

Satz. Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktion $(f+g) : x \mapsto f(x) + g(x)$ und $cf : x \mapsto cf(x)$ differenzierbar, und es gilt

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x), (cf)'(x) = cf'(x)$$

für alle $x \in D$.

Nun können wir z.B. die Funktion $x \mapsto 3e^x - x^2 + 17\cos x - 1$ differenzieren.

Produktregel

Satz. Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Dann ist auch die Funktion $(f \cdot g) : x \mapsto f(x)g(x)$ differenzierbar, und es gilt

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

für alle $x \in D$.

Beweis Produktregel

Anwendung der Grenzwertregeln (Folie 44):

$$\lim_{u\to x} \frac{f(u)g(u) - f(x)g(x)}{u - x} =$$

$$\lim_{u\to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} \lim_{u\to x} g(u) + \lim_{u\to x} f(x) \lim_{u\to x} \frac{g(u) - g(x)}{u - x}$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Quotientenregel

Satz. Es seien $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ differenzierbare Funktionen. Dann ist auch die Funktion $(f/g) : x \mapsto f(x)/g(x)$ differenzierbar, und es gilt

$$(f/g)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

für alle $x \in D$.

Damit kann man Potenzfunktionen mit negativen Exponenten ableiten. Wir setzen $f(x) = 1$ und $g(x) = x^n$, $n > 0$. Der Quotient $f/g : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{-n}$ hat dann die Ableitung

$$(f/g)'(x) = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}.$$

Beweis Quotientenregel

$$\lim_{u\to x} \frac{\frac{f(u)}{g(u)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{u-x} =$$

$$\frac{\lim_{u\to x} \frac{f(u)-f(x)}{u-x} g(x)}{\lim_{u\to x} g(u)g(x)} - \frac{\lim_{u\to x} \frac{g(u)-g(x)}{u-x} f(x)}{\lim_{u\to x} g(u)g(x)}$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Kettenregel

Satz. Es seien $f : D_1 \to \mathbb{R}$, $g : D_2 \to D_1$ differenzierbare Funktionen. Dann ist auch die Funktion $f \circ g : x \mapsto f(g(x))$ differenzierbar, und es gilt

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

für alle $x \in D$.

Beweis Kettenregel

$$\lim_{u\to x}\frac{f(g(u))-f(g(x))}{u-x} =$$

$$\lim_{u\to x}\frac{f(g(u))-f(g(x))}{g(u)-g(x)}\lim_{u\to x}\frac{g(u)-g(x)}{u-x} =$$

$$\lim_{v\to g(x)}\frac{f(v)-f(g(x))}{v-g(x)}g'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Ableitung der Umkehrfunktion

Satz. Es sei D ein Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Es sei $W := f(D)$ der Wertebereich von D. Dann existiert $f^{-1} : W \to D$, und es gilt

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

für alle $y \in W$.

Wir können nun die $\log$-Funktion als Umkehrfunktion von $\exp : x \to e^x$ ableiten:

$$\log'(y) = \frac{1}{\exp'(\log(y))} = \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y}$$

Beweis für die Umkehrfunktion

Zunächst muß f streng monoton wachsend oder fallend sein, je nach Vorzeichen von f'. Daher existiert f^{-1}. Die Umkehrfunktion ist wieder stetig. Daher gilt

$$\lim_{v \to y} \frac{f^{-1}(v) - f^{-1}(y)}{v - y} = \frac{1}{\lim_{v \to y} \frac{v-y}{f^{-1}(v)-f^{-1}(y)}}$$

$$= \frac{1}{\lim_{v \to y} \frac{f(f^{-1}(v))-f(f^{-1}(y))}{f^{-1}(v)-f^{-1}(y)}} = \frac{1}{\lim_{u \to f^{-1}(y)} \frac{f(u)-f(f^{-1}(y))}{u-f^{-1}(y)}} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Ableitung der Potenzfunktionen

Es sei $a \in \mathbb{R}$, $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^a = \exp(a \log(x))$. Nach der Kettenregel ist

$$f'(x) = \exp'(a \log(x)) a \log'(x) = \exp(a \log(x)) \frac{a}{x} = x^a \frac{a}{x} = a x^{a-1}.$$

Numerische Ableitung

Die Ableitung kann angenähert werden durch den Differentenquotient:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ oder } \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

für $h > 0$, aber $h \approx 0$. Beim numerischen Rechnen ist folgendes zu beachten: bei der Auswertung des Zählers tritt unter Umständen ein Fehler auf. Dieser Fehler wird durch die Division durch h stark vergrößert. Daher darf man h nicht all zu klein wählen.

Analyse des Fehlers

Der Gesamtfehler setzt sich aus Verfahrensfehler und Rundungsfehler zusammen.

Der Verfahrensfehler ist der Unterschied zwischen dem exakten Wert der Ableitung und dem exakten Wert des Differenzenquotienten. Um ihn zu bestimmen, nehmen wir an, daß f in der Nähe von x durch eine Polynomfunktion approximiert werden kann:

$$f(x+t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + R(t)t^3,$$

wobei $R(t)$ beschränkt und differenzierbar ist. (Dies gilt auch wenn f mindestens zweimal stetig ableitbar ist - siehe Kapitel "Taylorreihen".)

Der Verfahrensfehler