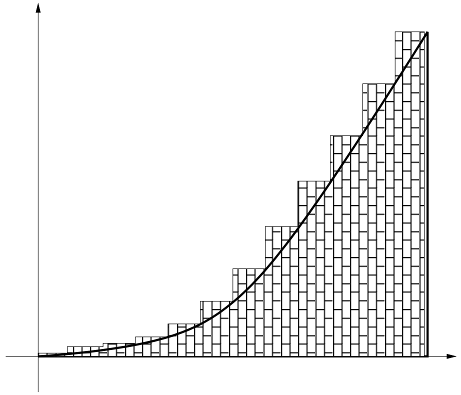
Das bestimmte Integral

Für Gebiete in der Ebene, die durch Geraden begrenzt sind (Polygone), ist der Flächeninhalt klar definiert durch in kongruente Teilgebiete.

Für Gebiete, die durch Kurven begrenzt werden, ist das nicht mehr möglich. Der Flächeninhalt wird als Grenzwert definiert und berechnet.

Eine Fläche unter einer Parabel



Der Flächeninhalt ist definiert als Grenzwert der Folge gegeben durch

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} \left(\frac{i}{n} \right)^2 \right)$$

Eine Fläche unter einer Parabel

$$a_n = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2}$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

Definition des bestimmten Integrals

Es sei $[a, b]$ ein abgeschlossenes beschränktes Intervall. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt stückweise stetig, wenn es reelle Zahlen $a = c_0 < c_2 < c_r = b$ gibt, sodaß f in jedem offenen Teilintervall (c_i, c_{i+1}) stetig ist.

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stückweise stetige und beschränkte Funktion. Wir betrachten eine Folge von endlichen Folgen von Zahlen $((x_{i,j})_{0 \le j \le i})_{i \in \mathbb{N}}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$a = x_{i,0} \le x_{i,1} \le \cdots \le x_{i,i} = b$$
$$\lim_{i \to \infty} \max_{j=1,\ldots,i} (x_{i+1} - x_i) = 0.$$

Definition des bestimmten Integrals

Fundamentalsatz der Integralrechnung. Der Grenzwert

$$\lim_{i \to \infty} \sum_{j=1,\ldots,i} ((x_{i+1} - x_i) f(x_i))$$

existiert und ist unabhängig von der Wahl der Folge von Folgen (solange die obigen Bedingungen erfüllt sind).

Den Grenzwert bezeichnet man als "Integral von f auf $[a, b]$" und schreibt ihn als $\int_a^b f(x)dx$.

Bemerkung

Die Höhe des Rechtecks ist oben gewählt als der Funktionswert des rechten Randpunktes. Man kann genausogut den linken Randpunkt wählen

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{j=1,\ldots,i} ((x_{i+1} - x_i) f(x_{i-1}))$$

oder einen beliebigen Wert in der Mitte, $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$:

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{j=1,\ldots,i} ((x_{i+1} - x_i) f(y_i))$$

Eigenschaften des Integrals

Linearität:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b (cf(x))dx = c\int_a^b f(x)dx$$

Monotonie: wenn $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, dann

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Eigenschaften des Integrals

Konstante und lineare Funktionen:

$$\int_a^b 1dx = b - a, \int_a^b xdx = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Schranken: wenn $u \leq f(x) \leq o$ für alle $x \in [a, b]$, dann

$$(b - a)u \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b - a)o$$

Eigenschaften des Integrals

Für $a \leq b \leq c$ gilt

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Unter Beibehaltung dieser Eigenschaft definieren wir

$$\int_a^a f(x)dx := 0, \int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx.$$

Stammfunktionen

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Eine Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f wenn sie differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)$ gilt für alle $x \in [a, b]$.

Beispiele:

$f(x)$	0	c	x	$x^a, a \neq -1$	x^{-1}	e^x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$F(x)$	c	cx	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\log(\lvert x\rvert)$	e^x	$-\cos(x)$	$\sin(x)$

Stammfunktionen

Das erste Beispiel zeigt, daß Stammfunktionen nicht eindeutig sind. Wenn $x \mapsto F(x)$ eine Stammfunktion von f ist, dann ist auch $x \mapsto F(x) + c$ eine Stammfunktion.

Umgekehrt gilt: wenn F_1 und F_2 Stammfunktionen von f sind, dann ist $F_2(x) = F_1(x) + c$ für eine Konstante c.

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir definieren die Summenfunktion $G : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$G(x) := \int_a^x f(t)dt.$$

Dann ist $G(x)$ eine Stammfunktion.

Umgekehrt läßt sich jede Stammfunktion F von f schreiben als $F(x) = G(x) + c$. Es folgt die Formel

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_{x=a}^{x=b}.$$

Beweis

Mittels der Eigenschaften läßt sich zeigen:

$$\min_{y \in [x,u]} f(y) \frac{G(u) - G(x)}{u - x} \leq \max_{y \in [x,u]} f(y)$$

Für $u \to x$ konvergieren die beiden äußeren Seiten beide gegen $f(x)$, also gilt

$$G'(x) = \lim_{u \to x} \frac{G(u) - G(x)}{u - x} = f(x).$$

Schreibweise

Man verwendet die Schreibweise $\int f(x)dx$ – das unbestimmte Integral – für eine nicht näher spezifizierte Stammfunktion von f.

Regeln zur Integration

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int (cf(x))dx = c \int f(x)dx$$

(schon bekannt vom bestimmten Integral)

Partielle Integration

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx,$$

wobei F eine Stammfunktion von f ist. Zum Beweis braucht man nur beide Seiten ableiten und die Produktregel anwenden.

Ein Integrationsproblem wird auf ein anderes Integrationsproblem zurückgeführt, das nicht unbedingt einfacher ist. Die Anwendung dieser Regel ist dann sinnvoll, wenn der Faktor g durch ableiten sehr viel einfacher wird, z.B. $g(x) = x$ oder $g(x) = \log(x)$.

Beispiel

$$\int x \arctan(x) dx = \frac{1+x^2}{2} \arctan(x) - \int \frac{1+x^2}{2} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\frac{1+x^2}{2} \arctan(x) - \int \frac{1}{2} dx = \frac{1+x^2}{2} \arctan(x) - \frac{x}{2}$$

Die Substitutionsregel

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)),$$

wobei F eine Stammfunktion von f ist. Zum Beweis braucht man nur beide Seiten ableiten und die Kettenregel anwenden.

Zwei Spezialfälle kommen häufig vor:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)a\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \int \frac{1}{g(x)}g'(x)dx = \log(|g(x)|)$$

Beispiele

$$\int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}dx = -\log(|\cos(x)|)$$

$$\int \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\log(x^2+1)$$

Volumen von Rotationskörpern

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(x) \geq 0$ für alle x. Wenn der Graph von f um die x-Achse rotiert, entsteht ein Rotationskörpers.

Das Volumen des Körpers kann definiert/berechnet werden als Grenzwert des Volumens von Körpern, die aus Kreisscheiben von Radius $f(x_i)$ und Dicke $x_{i+1} - x_i$ zusammengebaut; $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Volumen von Rotationskörpern

Es sei $((x_{i,j})_{0\leq j\leq i})_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen wie auf Folie 104. Dann ist

$$V = \lim_{i\to\infty} \sum_{j=1,\ldots,i} ((x_{i+1} - x_i) f(x_i)^2 \pi)$$

und durch Vergleich mit der Definition des bestimmten Integrals folgt

$$V = \int_a^b (f(x)^2\pi) dx = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

Beispiel

Wir setzen $f : [-R, R] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{R^2 - x^2}$.

$$V = \pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}^2 dx = \pi \int_{-R}^{R} R^2 dx - \pi \int_{-R}^{R} x^2 dx$$

$$= \pi(R^2 x|_{x=-R}^{x=R} - \frac{x^3}{3}\Big|_{x=-R}^{x=R}) = \pi(2R^3 - \frac{2}{3}R^3) = \frac{4R^3\pi}{3}$$

Bogenlänge einer Kurve

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Das Bogenlänge des Graphen kann definiert/berechnet werden als Grenzwert der Summe von Strecken zwischen den Punkten $(x_i, f(x_i))$ und $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, für $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Bogenlänge einer Kurve

Es sei $((x_{i,j})_{0\leq j\leq i})_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen wie auf Folie 104. Dann ist

$$L = \lim_{i\to\infty} \sum_{j=1,\ldots,i} \sqrt{(f(x_{i+1}) - f(x_i))^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}$$

Bogenlänge einer Kurve

Für jedes i gibt es ein $y_i \in [x_i, x_{i+1}]$, sodaß $f'(y_i) = \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}$ gilt. Daraus folgt

$$\sqrt{(f(x_{i+1}) - f(x_i))^2 + (x_{i+1} - x_i)^2} = \sqrt{f'(y_i)^2(x_{i+1} - x_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}$$

$$= \sqrt{f'(y_i)^2 + 1}(x_{i+1} - x_i),$$

$$L = \lim_{i\to\infty} \sum_{j=1,\ldots,i} \sqrt{f'(y_i)^2 + 1}(x_{i+1} - x_i) = \int_a^b \sqrt{f'(x)^2 + 1}dx$$

wegen Folie 106.

Beispiel

Wir berechnen die Bogenlänge der Parabel $y = x^2$ zwischen den Punkten $(0,0)$ und $(1,1)$.

$$f(x) = x^2, f'(x) = 2x, \sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + 4x^2}$$
$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx$$

Das unbestimmte Integral kann mit den uns bekannten Methoden nicht ausrechnen.

Beispiel

Der Algorithmus in Maple liefert

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx = \frac{x\sqrt{1+4x^2}}{2} + \frac{\log\left(2x+\sqrt{1+4x^2}\right)}{4},$$

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\log\left(2+\sqrt{5}\right)}{4} = 1.478942857$$

Mantelfläche eines Rotationskörpers

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f(x) \geq 0$ für alle x. Wenn der Graph von f um die x-Achse rotiert, entsteht ein Rotationskörpers. Die Mantelfläche (Oberfläche ohne die beiden Kreisscheiben) wird berechnet/definiert als Grenzwert der Summe von Kegelstumpf-Mantelflächen.

Für die einzelne Kegelstumpf-Mantelfläche gilt

$$M_i = \pi(f(x_i) + f(x_{i+1}))\sqrt{(f(x_{i+1}) - f(x_i))^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}$$

$$= 2\pi f(y_i)\sqrt{f'(y_i)^2 + 1}(x_{i+1} - x_i)$$

für ein $y_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Mantelfläche eines Rotationskörpers

Die gesamte Mantelfläche ist daher

$$M = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{f'(x)^2 + 1}dx$$

Beispiel

Wir setzen wieder $f : [-R, R] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{R^2 - x^2}$.

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \sqrt{f'(x)^2 + 1} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$M = 2\pi \int_{-R}^{R} R dx = 4R^2\pi$$