Taylorpolynome

Es sei D ein Intervall, welches den Nullpunkt enthält. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die mindestens n mal stetig differenzierbar ist.

Wenn wir die Funktion vergessen haben, aber die n-te Ableitung $g : D \to \mathbb{R}$ und die Werte der Ableitungen $f(0), f'(0), \ldots, f^{(n-1)}(0)$ kennen, dann läßt sich f durch Integration zurückgewinnen:

Taylorpolynome

$$f^{(n-1)}(t) = \int_0^t g(s)ds + f^{(n-1)}(0),$$

$$f^{(n-2)}(t) = \int_0^t \int_0^{s_2} g(s_1)ds_1 ds_2 + f^{(n-1)}(0)t + f^{(n-2)}(0), \ldots$$

$$f(t) = \int_0^t \ldots \int_0^{s_n} g(s_1)ds_1 \ldots ds_n + f^{(n-1)}(0)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + f(0).$$

Das Integral läßt sich abschätzen, wenn man eine Schranke für $|g(t)|$ kennt:

Taylorpolynome

$$\left|\int_0^t g(s)ds\right| \le Mt,$$

$$\left|\int_0^t \int_0^{s_2} g(s_1)ds_1 ds_2\right| \le M\frac{t^2}{2}, \ldots,$$

$$\left|\int_0^t \ldots \int_0^{s_n} g(s_1)ds_1 \ldots ds_n\right| \le M\frac{t^n}{n!}.$$

Resultat

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f'(0)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1} + O(t^n),$$

$$f(x+t) = f(x)+f'(x)t+\frac{f'(x)}{2!}t^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}t^{n-1}+O(t^n),$$

$$\begin{aligned} f(u) &= f(x) + f'(x)(u-x) + \frac{f'(x)}{2!}(u-x)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(u-x)^{n-1} + O((u-x)^n). \end{aligned}$$

Jede differenzierbare Funktion läßt sich in einer kleinen Umgebung durch eine Polynomfunktion annähern. Die Aproximation ist um so besser, je öfter die Funktion differenzierbar ist.

Die Groß-O-Notation

$O(f(x))$ ist die Bezeichnung für einen nicht näher bezeichneten Term der Form $B(x)f(x)$, wobei $B(x)$ beschränkt ist. Zum Beispiel ist $O(x^n)$ ein Term zwischen $-Cx^n$ und Cx^n, wobei C nicht von x abhängt.

Man verwendet dasselbe Symbol für verschiedene Terme ("Mißbrauch der Sprache"), z.B. bei

$$O(x^2) + O(x^3) = O(x^2)$$

Taylorreihen

Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Dann heißt die Potenzreihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} t^i = f'(x) + f + (x)t + \ldots \frac{f''(x)}{2!} t^2 \ldots$$

die Taylorreihe von f bei x.

Man möchte gerne haben, daß die Reihe gegen $f(x+t)$ konvergiert, so wie auf Folie 37/38.

Exponentialreihe, Sinus- und Cosinusreihe

Im Fall $f(x) = e^x / \sin(x) / \cos(x)$ sind die Ableitungen periodisch, daher haben wir Schranken $M = e^t/1/1$ für alle Ableitungen $f^{(n)}(s)$ im Intervall $s \in [0,t]$. Wegen $\lim \frac{M}{n!} = 0$ geht die Folge der Differenzen "Funktionswert minus Taylorpolynom" gegen Null, für jedes $t \in \mathbb{R}$. Daher konvergiert die Taylorreihe immer gegen den Funktionswert.

Die Taylorreihe liefert in diesen Fällen eine effiziente Methode zum Auswerten.

Die geometrische Reihe als Taylorreihe

Wir setzen $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$. Dann ist

$$f'(x) = -x^{-2}, f''(x) = +2!x^{-3}, \ldots, f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-n-1}$$

und die Taylorreihe bei 1 ist daher

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots.$$

Diese Reihe konvergiert für $|x| < 1$ gegen den Funktionswert $\frac{1}{1+x}$. Für $|x| \geq 1$ ist die Taylorreihe aber divergent.

Die Taylorreihe des Logarithmus

Wir setzen $f(x) = \log(x)$. Dann ist

$$f'(x) = -1, f''(x) = -x^{-2}, f'''(x) = +2!x^{-3}, \ldots, f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!x$$

und die Taylorreihe bei 1 ist daher

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{x^i}{i} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots.$$

Die Taylorreihe des Logarithmus

Der Fehler läßt sich abschätzen durch die Folge $(\frac{x^m}{m})_m$, und die Folge konvergiert gegen 0 für $|x| \leq 1$. Also ist

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$$

für $x \in (-1, 1]$.

Gliedweise Integration

Die Taylorreihe des Logarithmus hätte man auch durch gliedweise Integration der geometrischen Reihe erhalten können:

$$\log(1+x) = \int \frac{1}{1+x} dx = \int (1 - x + x^2 + \ldots) dx$$

$$= \int 1 dx - \int x dx + \int x^2 dx - \cdots = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$$

Das funktioniert für beliebige Potenzreihen im Innern des Konvergenzbereichs.

Die Taylorreihe des Arcustangens

Durch gliedweises Integrieren von $\frac{1}{1+x^2}$ erhalten wir

$$\arctan(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int (1 - x^2 + x^4 + \dots) dx$$

$$= \int 1 dx - \int x^2 dx + \int x^4 dx - \dots = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

Diese Reihe wird verwendet zur Berechnung von π.

Ein seltsames Beispiel

Wir setzen $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ für $x \neq 0$. Die Ableitungen sind von der Gestalt $P(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$, wobei P ein Polynom ist. Da die Exponentialfunktion stärker wächst als jedes Polynom, existiert der Grenzwert für $x \to 0$. Daher läßt sich f stetig fortsetzen, und wir erhalten eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(0) = f'(0) = f'''(0) = \cdots = 0.$$

Die Taylorreihe bei 0 ist Null. Sie konvergiert natürlich für alle x, aber nicht gegen die Funktion f sondern gegen die Nullfunktion.

Extremstellen

Satz. Es sei $n \geq 2$. Es sei x ein innerer Punkt von D, $f : D \to \mathbb{R}$ mindestens $n+1$-mal differenzierbar, $f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n-1)} = 0$, und $a := f^{(n)}(x) \neq 0$. Dann gilt:
Wenn n gerade ist, besitzt f bei x ein Grenzwert, und zwar ein Maximum/Minimum falls $a < 0/a > 0$ ist.
Wenn n ungerade ist, liegt keine Extremstelle vor (Wendepunkt).

Beweis: In der Nähe von x gilt

$$f(u) = f(x) + \frac{a}{n!}(u-x)^n + O((u-x)^{n+1})$$

Das Vorzeichen von $f(u) - f(x)$ wird bestimmt durch $a(u-x)^n$.

Berechnung von Grenzwerten

Wir berechnen den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \log(1+x)}{(1-\cos x)\sin x}$$

dadurch, daß wir auftauchende Funktion durch Taylorpolynome ersetzen:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2(x + O(x^3))}{(1 - 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4))(x + O(x^3))}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^3 + O(x^4)}{\frac{x^3}{2} + O(x^5)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + O(x)}{\frac{1}{2} + O(x^2)} = 2$$