Funktionen in zwei Variablen

Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$. Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Partielle Funktionen erhält man durch Einsetzen von $x = a$ oder $y = b$:

$$f_{x=a} : D_{x=a} \to \mathbb{R}, y \mapsto f(a, y)$$

$$f_{y=b} : D_{y=b} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x, b)$$

Der Graph einer Funktion in zwei Variablen

Der Graph der Funktion f ist die Menge der Punkte $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, die die Gleichung $z = f(x, y)$ erfüllen.

Die Parameterlinien sind die Menge der Punkte des Graphen mit fester x-bzw. y-Koordinate. Man kann sie deuten als Graphen der partiellen Funktionen.

Wenn man die Menge der Punkte des Graphen mit fester z-Koordinate in die xy-Ebene projiziert, erhält man die Niveaulinien.

Folgen und Stetigkeit im $\mathbb{R}^2$

Es sei $(a_n, b_n)_n$ eine Folge von Punkten in der Ebene. Die Folge heißt konvergent, wenn beide Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergieren. Der Grenzwert der Folge ist der Punkt $(\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n)$.

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt (a, b), wenn für jede Folge $(a_n, b_n)_n$, die gegen (a, b) konvergiert, die Folge der Funktionswerte $(f(a_n, b_n))_n$ gegen $f(a, b)$ konvergiert. Die Funktion heißt stetig, wenn sie in jedem Punkt $p \in D$ stetig ist.

Stetigkeit

Die Funktionen $+$, $\cdot$, $/$ sind stetig im Definitionsbereich.

Die Hintereinanderausführung von stetigen Funktionen ist wieder stetig.

Wenn f stetig ist, dann sind auch die partiellen Funktionen stetig. Es gibt aber auch Funktion, deren partielle Funktionen stetig sind, und die trotzdem unstetig sind.

Partielle Ableitungen

Die partiellen Ableitungen sind die definiert als die Ableitungen der partiellen Funktionen.

Schreibweise: statt $(t \to f(t,y))'(x)$ schreibt man $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ oder $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$.

Differenzierbarkeit

Direkte Verallgemeinerung von Folie 54 ist nicht möglich. Bei einer differenzierbaren Funktion in einer Variablen gibt es jedoch eine lineare Approximation, und dieses Konzept ist verallgemeinerbar.

Definition: Die Funktion $f : D \subset \mathbb{R}$ heißt bei (x, y) differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt, sodaß der Grenzwert

$$\lim_{(u,v)\to(x,y)} \frac{f(u, v) - f(x, y) - L(u - x, v - y)}{\sqrt{(u - x)^2 + (v - y)^2}}$$

existiert und gleich Null ist. Die lineare Abbildung L heißt Ableitung von f bei (x, y).

Beispiel

Konstante und lineare Abbildungen sind differenzierbar, in diesem Fall ist der Grenzwert konstant Null.

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$ überall differenzierbar, und die Ableitung ist $(u, v) \to uy + vx$:

Beispiel

$$\lim_{(u,v)\to(x,y)} \frac{uv - xy - ((u-x)y + (v-y)x)}{\sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2}}$$

$$= \lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{(x+s)(y+t) - xy - (sy + tx)}{\sqrt{s^2+t^2}} = \lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{st}{\sqrt{s^2+t^2}}$$

Da $|st| \leq \frac{s^2+t^2}{2}$ gilt für alle $s,t \in \mathbb{R}$, ist die Funktion nach dem Limes ein $O(\sqrt{s^2+t^2})$ und hat den Grenzwert 0.

Zusammenhang mit den partiellen Ableitungen

Satz. Wenn $f : D \to \mathbb{R}$ im Punkt (x, y) differenzierbar ist, dann existieren die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ und $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, und die totale Ableitung ist

$$(u, v) \mapsto \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} u + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} v.$$

Die Umkehrung gilt nicht

Beispiel. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ hat im Punkt $(0,0)$ partielle Ableitungen, weil die partiellen Funktionen gleich 0 sind. Der Grenzwert

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|uv|}}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

existiert aber nicht, wie man mit der Verwendung der Folgen $(1/n, 0)_n$ und $(1/n, 1/n)_n$ sehen kann.

Umkehrung mit stärkerer Voraussetzung

Satz. Wenn beide partielle Ableitungen in einer Umgebung von (x, y) existieren und stetig sind, dann ist f an der Stelle (x, y) differenzierbar.

Im obigen Beispiel existiert die partielle Ableitung $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ nicht für $x = 0$, $y \neq 0$.