Mathematik 1 (Analysis) **Wintersemester 2008**
http://www.risc.uni-linz.ac.at/education/courses/ws2008/mathematik1/

Hausübung

Besprechung am **29.01.2009**

Aufgabe 1 Wir betrachten den Kettenbruch a und die Kettenwurzel b:

$$a = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}} \quad \text{und} \quad b = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}.$$

a) Zeigen Sie, daß die Berechnung von a äquivalent dazu ist, den Grenzwert der rekursiv definierten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}, \quad a_0 = 1, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

zu bestimmen.

b) Berechnen Sie unter der Annahme, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert, ihren Grenzwert.

c) Beweisen Sie, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in der Tat konvergiert.

d) Zeigen Sie, dass die Kettenwurzel konvergiert, und berechnen Sie b.

Aufgabe 2

a) Leiten Sie eine Formel für den Koeffizienten c der Regressionsparabel $y = cx^2$ durch eine Punktwolke $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ her, in dem Sie ein c bestimmen, das die Summe der Fehlerquadrate minimiert. Warum ist c eindeutig bestimmt?

b) Bei der Messung des reinen Bremswegs s [m] (ohne Reaktionsweg) eines bestimmten PKW-Typs in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v [km/h] erhielt man folgende Messwerte:

v_i	10	20	40	50	60	70	80	100	120
s_i	1	3	8	13	18	23	31	47	63

Berechnen Sie den Koeffizienten c der Regressionsparabel $s = cv^2$ und plotten Sie die Parabel mit den Messwerten in Sage.

c) Wie lautet mit diesem Ergebnis die Formel für den gesamten Bremsweg, wenn man eine durchschnittliche Reaktionszeit von 0.45 sec annimmt? Um wieviel Meter ist der Bremsweg länger, wenn Sie mit 60 statt 50 km/h unterwegs sind?

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie die Dimensionen, d.h. den Radius r und die Höhe h, eines in einer Kugel mit Durchmesser 4 eingeschriebenen Kegels, so dass dessen Volumen maximal ist.

b) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der durch Drehung des Kreises

$$(x-2)^2 + y^2 = 1$$

um die y-Achse entsteht.

Aufgabe 4 Wir wollen die Taylorreihe der rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 3x + 1}$$

um den Entwicklungspunkt $x = 0$ untersuchen.

a) Berechnen Sie zunächst die ersten vier Terme der Taylorreihe von $f(x)$, d.h. das Taylorpolynom $T_3(x, 0)$, mit Hilfe der Formel von Taylor.

b) Wie Sie in a) bemerkt haben, ist es recht mühsam, die höheren Ableitungen der rationalen Funktion $f(x)$ zu berechnen. Überlegen Sie sich, wie Sie in diesem Fall das Taylorpolynom ohne Differenzieren erhalten können. Machen Sie dazu einen Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten und multiplizieren Sie mit dem Nenner! Können Sie für eine beliebig gegebene rationale Funktion eine rekursive Berechnungsvorschrift für die Koeffizienten ihrer Taylorreihe um $x = 0$ angeben?

c) Als "m-section" einer Potenzreihe $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ bezeichnet man eine Reihe, die nur jedes m-te Element aus $g(x)$ enthält, also zum Beispiel $g_k(x; m) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{k+mj} x^{k+mj}$ für ein k zwischen 0 und $m - 1$. Sie kann mit der Formel

$$g_k(x; m) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} r^{m-kj} g(r^j x), \quad r = e^{2\pi i/m}$$

berechnet werden. Tun Sie dies für $f_1(x; 3)$!
Hinweis: Behandeln Sie r zunächst als symbolischen Parameter unter Ausnutzung der Tatsache, dass $r^3 = 1$ ist. Die 3-section $f_1(x; 3)$ ist wieder eine rationale Funktion mit ganzzahligen Koeffizienten, die Einheitswurzel r sollte am Ende also verschwinden.

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und bis spätestens 22.01.2009 beim Übungsleiter oder der Übungsleiterin abzugeben. Die Bewertung dieser Aufgaben wird in Ihrer Gesamtnote mit 50% gewichtet.