Übungsblatt 10

http://www.risc.uni-linz.ac.at/education/courses/ws2009/mathematik2

Besprechung am 28.1.2010

Aufgabe 1 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mittels Taylorentwicklung. Dazu berechnen Sie die ersten Terme der Taylorentwicklung von Nenner und Zähler der gegebenen Funktionen um den Punkt x_0, gegen den x strebt. Dann kürzen Sie die entsprechenden Potenzen von $x - x_0$, um abschließend durch Einsetzen $x = x_0$ den Grenzwert zu erhalten.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(2x) - 4x^2}{\cos x - 1}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1 - 2x}{\cos^2 x - 1}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\sin(\pi x)}$$

Aufgabe 2 Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen bis zur 2. Ordnung der Funktion

$$\ln \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Aufgabe 3 (a) Bestimmen Sie die Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{at}\left(\sin x - bx^2\right)$$

die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

erfüllt.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $w(x,t) = g(x - kt)$ (falls g differenzierbar ist) die Transportgleichung

$$\frac{\partial w}{\partial t} + k\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

erfüllt.

Aufgabe 4 Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$ nicht stetig ist, indem Sie zwei Nullfolgen (x_n, y_n) finden, für die $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n)$ gegen unterschiedliche Grenzwerte strebt.

Aufgabe 5 Schreiben Sie ein Programm in Sage, das die Taylorreihe einer gegebenen Funktion um einen Entwicklungspunkt x_0 bis zu einer gegebenen Ordnung r berechnet. Verwenden Sie dazu die Prozedur zur symbolischen Ableitung eines gegebenen Ausdruck von Blatt 6 und testen Sie Ihr Programm an den Funktionen aus Aufgabe 1.