Übungsblatt 2

http://www.risc.uni-linz.ac.at/education/courses/ws2009/mathematik1

Besprechung am **22.10.2009.**

Aufgabe 1 Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

a) $z^3 - 2(1-\mathrm{i})z^2 + 2(2-\mathrm{i})z = 0$,

b) $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} - 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + 1 = 0$,

c) $z\bar{z} - z - \bar{z} = 0$.

Aufgabe 2 Wir betrachten die komplexe Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{z - \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}z}.$$

Bestimmen Sie das Bild $f(G_1)$ und $f(G_2)$ der Geraden

$$G_1 = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}\} \mid \mathrm{Re}(z) = 0\} \quad \text{und} \quad G_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 0\}.$$

Aufgabe 3 Für welche Parameter $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

a) injektiv, b) surjektiv, c) bijektiv?

Aufgabe 4 Überzeugen Sie sich davon, daß der Tangens $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ und die Exponentialfunktion $\exp : \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \in (-\pi, \pi)\} \to \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ auf den angegebenen Definitions- und Wertebereichen bijektiv sind, und verifizieren Sie die Identität

$$\arctan(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \log\left(\frac{1 + \mathrm{i}x}{1 - \mathrm{i}x}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

zwischen ihren Umkehrfunktionen.

Aufgabe 5 Sei A eine Menge mit a Elementen und B eine Menge mit b Elementen, $a, b \in \mathbb{N}$. Schreiben Sie ein Programm, das aus a und b die Anzahl möglicher injektiver, surjektiver und bijektiver Abbildung von A nach B berechnet.