Übungsblatt 5

Besprechung am **12.11.2009.**

Aufgabe 1 Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^3-2x^2+1}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)^2}{x}$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

d) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

Aufgabe 2 Untersuchen Sie, ob die Größen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to -1+} x^n \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to -1+} \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

existieren, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

Aufgabe 3 Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{falls } x > 1 \\ 3 & \text{falls } x = 1 \\ x^2-4x+b+3 & \text{falls } x < 1 \end{cases}$$

überall stetig ist.

Aufgabe 4 Zeigen Sie: Wenn $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ überall stetig sind, dann ist auch deren Verkettung $f \circ g$ überall stetig.

Aufgabe 5 Eine stetige Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ kann im Rechner näherungsweise durch ihre Funktionswerte $f(\frac{i}{n})$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ repräsentiert werden. Zum Beispiel wäre

$$[0.,\ 0.01,\ 0.04,\ 0.09,\ 0.16,\ 0.25,\ 0.36,\ 0.49,\ 0.64,\ 0.81,\ 1.]$$

eine mögliche Darstellung der Funktion $x \mapsto x^2$.

Schreiben Sie ein Programm in Sage, das eine Näherung für den Funktionswert einer so gegebenen Funktion an einem gegebenen Punkt $x \in [0,1]$ berechnet. Dazu soll das Programm zunächst den Index i mit $\frac{i}{n} \le x \le \frac{i+1}{n}$ suchen, und dann $y \in \mathbb{R}$ bestimmen so dass die Punkte $(\frac{i}{n}, f(\frac{i}{n}))$, (x, y) und $(\frac{i+1}{n}, f(\frac{i+1}{n}))$ auf einer Geraden liegen. Dann gilt $y \approx f(x)$ und y kann als plausibles Ergebnis zurückgegeben werden.