

Übungsblatt 6

<http://www.risc.uni-linz.ac.at/education/courses/ws2009/mathematik2>

Besprechung am 26.11.2009.

Aufgabe 1 Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen

a) $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \sin(\cos(x)^2),$

b) $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(x) = x \log(1 + e^{x^3}),$

c) $f_3 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_3(x) = x^{\log(x)},$

d) $f_4 : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_4(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}.$

Aufgabe 2 Bestimmen Sie jeweils alle Punkte, in denen die Funktionen

a) $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \frac{1}{|x-5|+1},$

b) $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} + x, & \text{falls } x \neq 0, \\ 1, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$

c) $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \min\{x, (x-1)^2\},$

differenzierbar sind.

Aufgabe 3 Seien $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $g'(0) \neq 0$. Finden Sie Parameter $a, \lambda \in \mathbb{R}$, so daß die Funktion

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x < 0, \\ a + \lambda g(x), & \text{falls } x \geq 0, \end{cases}$$

auf ganz \mathbb{R} differenzierbar ist.

Aufgabe 4 Sei $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine injektive, stetige Funktion mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$. Beweisen Sie, daß f bijektiv und streng monoton wachsend ist.

Aufgabe 5 Schreiben Sie ein Programm in Sage, das die symbolische Ableitung eines gegebenen Ausdrucks berechnet (selbstverständlich ohne dabei auf die bereits implementierte Funktion `derivative` oder Varianten davon zurückzugreifen).

Ihre Funktion sollte zumindest in der Lage sein, beliebig verschachtelte Ausdrücke mit den Grundrechenarten, Potenzen, Logarithmen, Sinus und Cosinus abzuleiten.

Hinweis: Um einen symbolischen Ausdruck `f` aufzuschlüsseln, können Sie sich der Funktionen `f.operator()` und `f.operands()` bedienen, die eine liefert Ihnen die äußerste Operation im Ausdruck zurück, wobei die Grundrechenarten in der Form `operator.add`, `operator.mul`, etc. ausgegeben werden, die andere gibt Ihnen die zugehörigen Parameter als Liste.