Übungsblatt 8

http://www.risc.uni-linz.ac.at/education/courses/ws2009/mathematik2

Besprechung am 17.12.2009.

Aufgabe 1 Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n} + \sqrt{\frac{k}{n}} \right),$$

indem Sie die Folgenglieder als Riemannsumme auffassen.

Aufgabe 2 Finden Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktionen

a) $f_1 : [-1, 3] \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = x^3(x-2)^2 + 3,$

b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = |x-1|(x^2-8).$

Aufgabe 3 Gegeben seien n Punkte $(x_i, y_i)_{i=1}^n$ in $\mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$. Wir suchen nun eine Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von der Form $y(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, so daß die Summe

$$e_{a,b} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y(x_i))^2$$

der Quadrate der Abweichungen von den Werten y_i an den jeweiligen Stellen x_i minimal wird.

Geometrisch betrachtet, bedeutet das, daß wir eine Gerade suchen, parametrisiert durch die Steigung a und den Achsenabschnitt b, so daß der „Abstand" $e_{a,b}$ der Punkte $(x_i, y_i)_{i=1}^n$ von der Geraden möglichst klein wird.

a) Angenommen der Achsenabschnitt $b = b_0$ der Geraden ist vorgegeben. Berechnen Sie die Steigung a, so daß e_{a,b_0} minimal wird.

b) Angenommen die Steigung $a = a_0$ der Geraden ist vorgegeben. Berechnen Sie den Achsenabschnitt b, so daß $e_{a_0,b}$ minimal wird.

c) Bei welchem Paar $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ wird die Abweichung $e_{a,b}$ minimal?

Aufgabe 4

a) Sei $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ eine monoton fallende Funktion. Beweisen Sie die Äquivalenz

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) < \infty \iff \lim_{a\to\infty} \int_0^a f(x)\mathrm{d}x < \infty.$$

b) Bestimmen Sie, für welche $\gamma \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\gamma}$ konvergiert.

Aufgabe 5 Implementieren Sie das Newton-Verfahren in Sage.

a) Berechnen Sie damit eine Lösung der Gleichung $\mathrm{e}^x = x + 2$.

b) Versuchen Sie, die einzige Nullstelle der beliebig oft differenzierbaren Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

zu approximieren. Warum gelingt dies nicht oder nur sehr schlecht?