Übungsblatt 1

Besprechung am **21.10.2010**

Aufgabe 1 In Satz 1 der Vorlesung wurde die *Dreiecksungleichung*

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : |a + b| \leq |a| + |b|$$

erwähnt und im Beweis von Satz 1(7) zu Hilfe genommen, ohne selbst bewiesen worden zu sein. Tun Sie dies nun! Können Sie die Namensgebung dieser Formel erklären?

Aufgabe 2 Übersetzen Sie folgende Aussage

Zwischen zwei voneinander verschiedenen reellen Zahlen liegt mindestens eine weitere.

in die Sprache der Prädikatenlogik! Vertauschen Sie nun die Reihenfolge der Quantoren $\forall$ und $\exists$: ändert sich dadurch der Wahrheitsgehalt dieser Aussage?

Aufgabe 3 In der Definition der reellen Zahlen ist folgende (etwas unhandliche) prädikatenlogische Formel aufgetaucht:

$$\begin{aligned}\forall M \subseteq \mathbb{R} : (\exists S \in \mathbb{R}\ \forall x \in M : x \leq S) &\implies \\ &\big(\exists S_{\min} \in \mathbb{R} : (\forall x \in M : x \leq S_{\min}) \wedge (\forall S \in \mathbb{R} : (\forall x \in M : x \leq S) \implies S_{\min} \leq S)\big).\end{aligned}$$

Verneinen Sie diese Formel, indem Sie die Beweisregel $(\neg\forall x : P(x)) \iff (\exists x : \neg P(x))$, sowie bekannte aussagenlogische Regeln, wie zum Beispiel $(A \implies B) \iff (\neg A \vee B)$ oder das *de Morgansche Gesetz* $\neg(A \vee B) \iff (\neg A \wedge \neg B)$, anwenden.

Formulieren Sie die Aussage der verneinten Formel in natürlicher Sprache und überzeugen Sie sich, dass tatsächlich das Gegenteil der ursprünglichen Aussage ausgedrückt wird!

Aufgabe 4 Vollständige Induktion.
Zeigen Sie mit Hilfe des in der Vorlesung vorgestellten Beweisprinzips der *Induktion*

$$\Big(P(0) \wedge \big(\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \implies P(n+1)\big)\Big) \implies (\forall n \in \mathbb{N} : P(n))$$

folgende Identität:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Aufgabe 5 Verschaffen Sie sich Zugang zu einer lauffähigen Installation des Computeralgebrasystems Sage (`http://www.sagemath.org`). Machen Sie sich mit der Benutzeroberfläche, der Dokumentation und der Syntax von Sage vertraut!