Übungsblatt 10

Besprechung am **13.1.2011**

Aufgabe 1 Volumenberechnungen.

a) Berechnen das durch das Doppelintegral $\int_0^1 \int_0^1 x e^{xy}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$ gegebene Volumen!

b) Berechnen Sie das Volumen, welches von der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 1 - |x + y| - |x - y|$$

und der Koordinatenebene auf dem Kästchen $[(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})]$ eingeschlossen wird (Aufgabe 4 darf verwendet werden)! Um welchen geometrischen Körper handelt es sich dabei?

Aufgabe 2 Wir nennen zwei Polynome $p_1(x, y)$ und $p_2(x, y)$ *orthogonal auf dem Referenzdreieck*, wenn das “Skalarprodukt”

$$\langle p_1, p_2\rangle := \int_0^1 \int_0^{1-x} p_1(x, y)p_2(x, y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$$

verschwindet (also $= 0$ ist). Berechnen Sie alle linearen Polynome $p_2(x, y) = ax + by + 1$, $a, b \in \mathbb{R}$, die zu $p_1(x, y) = 2x - y$ orthogonal sind.

Aufgabe 3 Wir bezeichnen mit $x_1, \ldots , x_n$ die Komponenten von $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Der Bereich $D_n \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$D_n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0 \wedge \cdots \wedge x_n \geq 0 \wedge x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq 1\},$$

wird *n-dimensionaler Einheitssimplex* genannt (für $n = 2$ ist dies ein Dreieck und für $n = 3$ ein Tetraeder). Zeigen Sie, dass das Volumen von D_n durch $\frac{1}{n!}$ gegeben ist, in anderen Worten, dass für das folgende n-dimensionale Integral gilt:

$$\int_{D_n} 1\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{1}{n!}.$$

Hinweis: Man nutze die aus der Symmetrie des zu Grunde liegenden Problems resultierenden Identitäten $\int_{D_n} x_1\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \cdots = \int_{D_n} x_n\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{D_n} (1 - x_1 - \cdots - x_n)\, \mathrm{d}\mathbf{x}$.

Aufgabe 4 Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und $f : D_1 \cup D_2 \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\int_{D_1\cup D_2} f(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{D_1} f(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{D_2} f(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{D_1\cap D_2} f(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x},$$

sofern alle diese Integrale existieren. Sie dürfen dabei die Linearität des mehrdimensionalen Integrals verwenden, das heißt $\int_D (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}))\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_D f(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_D g(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}$.

Aufgabe 5 Implementieren Sie das Gradientenverfahren zum Auffinden lokaler Minima einer bivariaten Funktion $f(x, y)$ in Sage! Ähnlich einem Bergsteiger, der auf schnellstem Wege das Tal erreichen möchte, folgt dieses Verfahren dem steilsten Abstieg, um zu einem Minimum zu gelangen. Gestartet wird von einem vorgegebenen Punkt (x_0, y_0); der negative Gradient $-\nabla f(x_0, y_0)$ gibt die Richtung des steilsten Abstieges an. Man folgt nun dieser Richtung so lange (z.B. in kleinen Schritten von konstanter vorgegebener Schrittlänge), wie die Funktionswerte kleiner werden, und gelangt zum Punkt (x_1, y_1). Hier wird erneut der Gradient berechnet und wie zuvor fortgefahren. Testen Sie Ihr Programm an folgenden Beispielen:

a) $f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$,

b) $f(x, y) = (1 - x)^2 + 100(y - x^2)^2$, $(x_0, y_0) = (-0.5, 0.5)$.