Übungsblatt 11

Besprechung am **20.1.2011**

Aufgabe 1 Skizzieren Sie die beiden Kurven f_1, f_2 und bestimmen Sie, ob sie in $t_0 = 0$ differenzierbar sind:

$$f_1 : [-1,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (2\cos(\pi t) - \cos(2\pi t), 2\sin(\pi t) - \sin(2\pi t)),$$
$$f_2 : [-1,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \left(t, t^{2/3}\right).$$

Aufgabe 2 (a) In welchem Punkt ihres Definitionsbereichs ist die Durchlaufgeschwindigkeit der Kurve $f : [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \big(t^2 - 1, t(t^2 - 1)\big)$ maximal?

(b) Bestimmen Sie die Länge der folgenden Kurven:

$$f_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \left(\cos^3(t), \sin^3(t)\right),$$
$$f_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (\cos(2t), \sin(2t), t).$$

Aufgabe 3 Ist die Kurve $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$,

$$t \mapsto \begin{cases} \left(t, t \sin \frac{\pi}{t}\right), & t \neq 0, \\ (0,0) & t = 0, \end{cases}$$

messbar?

Aufgabe 4 Seien $f_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $f_2 : [b,c] \to \mathbb{R}^n$ zwei Kurven mit $f_1(b) = f_2(b)$. Sei weiters $f = f_1 \oplus f_2 : [a,c] \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$t \mapsto \begin{cases} f_1(t), & a \leq t < b, \\ f_2(t), & b \leq t \leq c. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f messbar ist wenn f_1 und f_2 messbar sind.

Aufgabe 5 Implementieren Sie ein Programm in Sage, das näherungsweise die Länge einer gegebenen Kurve f im Intervall $[a,b]$ berechnet. Testen Sie Ihr Programm an den Kurven aus Aufgabe 2(b) sowie an der Kurve $g : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \left(t, \sqrt{1-t^2}\right)$ um eine Näherung an π zu berechnen.