Übungsblatt 12

Besprechung am **27.01.2011**

Aufgabe 1 Berechnen Sie die angegebenen Wegintegrale:

a) $\int_\gamma (xy + y)\,\mathrm{d}s$, mit
$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\frac{1}{29160}t^6, \frac{1}{54}t^3)$.

b) $\int_\gamma (\cos(x)^2 + \sin(y)^2)\,\mathrm{d}s$, mit
$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\pi + t, \frac{\pi}{2} + t)$.

Aufgabe 2 Berechnen Sie mögliche Lösungen folgender Differentialgleichungen / Anfangswertprobleme.

$$\text{a) } f'(x) = \frac{2\ln(x)f(x)}{x},\ f(1) = 2, \quad \text{b) } g'(x) = \frac{-2}{x}g(x) + \cos(x^3).$$

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $u(x,t) = \sin(x+t) + \cos(x-t)$ eine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

ist.

b) Finden Sie Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion

$$u(x,t) = e^{at}(\sin x - bx^2)$$

die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

erfüllt.

Aufgabe 4 Seien γ, D und f wie in Satz 35. Sei außerdem $\varphi : [a,b] \to [a,b]$ stetig differenzierbar, streng monoton steigend und gelte $\varphi(a) = a,\ \varphi(b) = b$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\int_\gamma f(t)dt = \int_{\gamma\circ\varphi} f(t)dt$$

Aufgabe 5 Das explizite Euler-Verfahren.
Zu einem gegebenen Anfangswertproblem

$$f'(x) = g(x, f(x)), \qquad f(0) = y_0$$

wählt man eine Schrittweite $h = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, und setzt für $0 < i \leq k$:

$$t_i = t_{i-1} + h$$

Damit berechnet man Approximationen y_i der Funktionswerte $f(t_i)$ durch:

$$y_i = y_{i-1} + h \cdot g(t_{i-1}, y_{i-1}).$$

Implementieren Sie dieses Verfahren in Sage. Schreiben Sie außerdem eine Funktion, welche eine Approximation des Graphen von f zeichnet, indem die durch das Verfahren berechneten Punkte mittels Geradenstücken verbunden werden. Testen Sie ihr Programm mit den Beispielen aus Aufgabe 2.