Übungsblatt 3

Besprechung am **04.11.2010**

Aufgabe 1 Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie - etwa anhand eines Gegenbeispiels - die folgenden Aussagen:

a) $\left(\exists a \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n = a\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} a_n = 0\right)$

b) $\left(\lim_{n\to\infty} a_n = 0\right) \Rightarrow \left(\exists a \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n = a\right)$

Aufgabe 2 Prüfen Sie diese Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^3+7n^2+10n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

Aufgabe 3 Ein (unsterblicher, geduldiger) Wurm kriecht auf einem 1 Meter langen Gummiband vorwärts. Hat er einen Zentimeter zurückgelegt, muss er erst einmal ein wenig verschnaufen. In jeder dieser Pausen wird das Gummiband gleichmäßig auseinander gezogen, so dass es um einen Meter länger wird. Der Wurm startet seine Odyssee an einem der beiden Enden des Bandes.
Kommt der Wurm jemals am anderen Ende des Gummibandes an?

Aufgabe 4 Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Beweisen Sie:

$$\left(\exists a \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} a_n = a\right) \Rightarrow (\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \in \mathbb{N}, m, n > n_0 : |a_m - a_n| < \epsilon)\,.$$

Aufgabe 5 Eine Möglichkeit, eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ im Rechner darzustellen, ist die Angabe eines Intervalls $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ $(b \geq a)$ und $x \in [a, b]$. Je kleiner dabei die Länge $\epsilon := b - a$ des Intervalls ist, desto genauer ist x beschrieben.
Schreiben Sie eine Funktion in Sage, die zu gegebenen $c \in \mathbb{Q}$ mit $c > 0$ und $\epsilon \in \mathbb{Q}$ mit $\epsilon > 0$ zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $0 \leq b - a \leq \epsilon$ und $\sqrt[3]{c} \in [a, b]$ berechnet. Als arithmetische Operatoren sind dabei nur die Grundrechenarten zu verwenden.