Analysis (Mathematik 2 für Informatiker) **Wintersemester 2010**
http://www.risc.jku.at/education/courses/ws2010/analysis/

Übungsblatt 4

Besprechung am **11.11.2010**

Aufgabe 1 Nutzen Sie die Definitionen

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad \text{und} \qquad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},$$

um die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}(\cos(x)-1)^2$$

zu berechnen. Verwenden Sie nicht die Regel von L'Hôpital (die Differentiation wurde ja noch gar nicht offiziell eingeführt)!

Aufgabe 2 Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f_i(x)$ jeweils den (maximalen) Definitionsbereich $D_i \subseteq \mathbb{R}$ und jeweils den dazugehörenden Wertebereich $f_i(D_i), 1 \leq i \leq 4$:

a) $f_1(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ b) $f_2(x) = \exp(-x^2)$ c) $f_3(x) = \left(\sin\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\right)^{-1}$ d) $f_4(x) = \dfrac{|x|}{x}$

Aufgabe 3 Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit, d.h. in welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ sie stetig sind und in welchen nicht:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|$

b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

Aufgabe 4 In Satz 10 der Vorlesung wurde behauptet: wenn $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $g\colon f(D) \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind, dann ist auch $g \circ f\colon D \to \mathbb{R}, x \mapsto g(f(x))$ stetig. Beweisen Sie dies!

Aufgabe 5 Schreiben Sie eine Funktion in Sage, die zu einem gegebenen Funktionsausdruck $f(n)$ die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ untersucht (für geeignetes n_0, welches hier aber nicht relevant ist). Dazu sollen sowohl das Quotienten- als auch das Wurzelkriterium herangezogen werden (Sie dürfen das Kommando `limit` verwenden).

Hier ein paar Beispiele, wie der Output ungefähr aussehen sollte:

```
f(n)=1/exp(n); test_series(f)
    Quotientenkriterium: Reihe ist konvergent.
    Wurzelkriterium: Reihe ist konvergent.

f(n)=1/n^2; test_series(f)
    Quotientenkriterium: Kann Konvergenz nicht entscheiden.
    Wurzelkriterium: Kann Konvergenz nicht entscheiden.

f(n)=y^n; test_series(f)
    Quotientenkriterium: Reihe ist konvergent, wenn abs(y) < 1.
    Wurzelkriterium: Reihe ist konvergent, wenn abs(y) < 1.
```