Übungsblatt 5

Besprechung am **18.11.2010**

Aufgabe 1 Die Funktionen $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar auf D und $g(x) \neq 0$ für $x \in D$. Zeigen Sie, dass

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}, \qquad \text{für } x \in D.$$

Aufgabe 2 (a) Zeigen Sie, dass $(\sin(x))' = \cos(x)$.

(b) In welchen Punkten ihres Definitionsbereichs ist die Umkehrfunktion des Sinus

$$f\colon [0,1] \to [0, \frac{\pi}{2}], \quad f(x) = \arcsin(x)$$

stetig?

Aufgabe 3 Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

$$f_1(x) = \tan(x), \qquad f_2(x) = 2^{\sqrt{x}}, \qquad f_3(x) = \cos(2x) + 2\sin(x)^2, \qquad f_4(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{1-x}}.$$

Aufgabe 4 Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $g'(0) \neq 0$. Finden Sie Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die stückweise definierte Funktion

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x < 0, \\ a + b\,g(x), & \text{falls } x \geq 0, \end{cases}$$

stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 5 Eine stetige Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ kann im Rechner näherungsweise durch ihre Funktionswerte $f\left(\frac{i}{n}\right)$, $i = 0, \ldots, n$, repräsentiert werden. Zum Beispiel wäre

$$[0., 0.01, 0.04, 0.09, 0.16, 0.25, 0.36, 0.49, 0.64, 0.81, 1.]$$

eine mögliche Darstellung der Funktion $x \mapsto x^2$.

Implementieren Sie ein Programm in Sage, das eine Näherung für den Funktionswert einer so gegebenen Funktion und ihrer ersten Ableitung an einem gegebenen Punkt $x_0 \in [0,1]$ berechnet. Bestimmen Sie dazu erst das Intervall $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$, in dem x_0 liegt, und dann ein $y_0 \in \mathbb{R}$ so, dass die Punkte $\left(\frac{i}{n}, f\left(\frac{i}{n}\right)\right)$, (x_0, y_0) und $\left(\frac{i+1}{n}, f\left(\frac{i+1}{n}\right)\right)$ auf einer Geraden liegen. Geben Sie dieses y_0 und die Steigung dieser Interpolationsgerade als Näherungen für $f(x_0)$ und $f'(x_0)$ zurück. Als arithmetische Operationen sind dabei nur die Grundrechenarten erlaubt.

Testen Sie Ihr Programm an den folgenden Funktionen:

- $[0., 0.01, 0.04, 0.09, 0.16, 0.25, 0.36, 0.49, 0.64, 0.81, 1.]$, für $x_0 = 0.73$,
- $[-0.42, -0.24, -0.11, -0.0084, 0.073, 0.14, 0.19, 0.24, 0.27, 0.31, 0.33]$, für $x_0 = 0.32$,
- $[-0.031, 0.28, 0.56, 0.79, 0.94, 1.0, 0.96, 0.83, 0.61, 0.34, 0.031]$, für $x_0 = 0.49$.