Übungsblatt 6

Besprechung am **25.11.2010**

Aufgabe 1 Berechnen Sie - sofern existent - die Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x\cos(x)}{x\sin(x)+\cos(x)-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k}{\sum\limits_{k=0}^{m} b_k x^k}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, $a_n, b_m \neq 0$

Aufgabe 2 Berechnen Sie zu jeder der angegebenen Funktionen alle lokalen Extremwerte. Welches sind globale Extremwerte?

a) $f : [-5; \infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto 6x^5 - x^4 + 7x^3 + 3$

b) $f : \mathbb{R}\backslash\{1, -1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^3}{x^2-1}$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(-|x|)$

Aufgabe 3 Beweisen Sie: Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a, b[$, so ist f konstant.

Aufgabe 4 Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren, angewandt auf

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 2,$$

für einen Startwert $x_0 > \sqrt{2}$ konvergiert.

Aufgabe 5 Implementieren Sie das Newton-Verfahren in Sage und lösen Sie damit folgende Problemstellungen:

a) Approximieren Sie die drei Nullstellen der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^5 + 3x^4 - 11x^3 - 23x^2 + 9x + 74.$$

b) Approximieren Sie die Schnittpunkte der beiden Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(\cos(x)),$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2.$$

Neben den Grundrechenarten dürfen Sie die Funktion *derivative*() verwenden.