Übungsblatt 8

Besprechung am **9.12.2010**

Aufgabe 1 Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) (Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel) $\forall a, b > 0 : \sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$

(b) (Cauchy-Schwarz Ungleichung) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\| \|y\|$

(c) (Dreiecksungleichung) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Aufgabe 2 Welche der folgenden Funktionen ist im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ stetig?

$$f_1(x,y) = \sin(xy), \qquad f_2(x,y) = \frac{xy^2}{x^3+y^3}.$$

Aufgabe 3 (a) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial}{\partial(-1,1)} f(2,1)$ für $f(x,y) = xy - y^2$.

(b) Bestimmen Sie die Gradienten von

$$g_1(x,y) = 3^{xy}\sin(xy), \qquad g_2(x,y) = \tan(y), \qquad g_3(x,y) = xy - y^2.$$

Aufgabe 4 Welche dieser mehrdimensionalen Folgen konvergieren für $n \to \infty$? Bestimmen Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert.

$$a_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{(-1)^n}{n}, \frac{n^2-1}{(n+1)^2}\right), \quad b_n = \left(\tan(\tfrac{1}{n}), \frac{n^n}{n!}, \cos(n\pi)\right), \quad c_n = \left(\left(\tfrac{3}{4}\right)^n, \sqrt[n]{n}\right).$$

Aufgabe 5 Implementieren Sie die folgenden Routinen in Sage:

(a) Ein Programm, das die Taylorentwicklung einer gegebenen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um den Punkt x_0 bis zur Ordnung r berechnet. Dazu dürfen Sie die Sage internen Funktionen zur Ableitung verwenden.

(b) Ein Programm zur symbolischen Integration von Polynomen. Dazu dürfen Sie die Sage interne Funktionen zur Koeffizientenbestimmung verwenden.

(c) Ein Programm, das das bestimmte Integral einer gegebenen Funktion f über einem endlichen Intervall $[a, b]$ annähert, indem zunächst das Taylorpolynom mit einem geeigneten Entwicklungspunkt bestimmt wird und dann über diese Annäherung mit der Funktion aus (b) integriert wird.

Testen Sie Ihre Funktionen für den folgenden Input mit verschiedenen Ordnungen:

- $f_1(x) = \cos(x)$ und $[a, b] = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
- $f_2(x) = \frac{(x-1)^3}{(x-2)x}$ und $[a, b] = [1, \frac{3}{2}]$
- $f_3(x) = \mathrm{e}^x(x^2 - 5x + 6)$ und $[a, b] = [2, 3]$