Analysis 326.022 · Vorlesungsklausur · Winter 2010/2011

Name ....

Mat. Nr. ....

SKZ ....

2011-02-07

Aufgabe 1 Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche sind falsch?

- Jede stetige Funktion ist differenzierbar.
- Jede differenzierbare Funktion ist stetig.
- Jede stetige Funktion ist integrierbar.
- Jede integrierbare Funktion ist stetig.
- Jede integrierbare Funktion ist differenzierbar.
- Jede differenzierbare Funktion ist integrierbar.

Lösung. falsch, wahr, wahr, falsch, falsch, wahr.

Aufgabe 2 Zur Erinnerung: Eine Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *konvergiert* gegen eine Zahl $a \in \mathbb{R}$, falls gilt

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Zeigen Sie: Wenn $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge von negativen Zahlen ist, d. h. wenn gilt $a_n < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann kann $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ nicht gegen 2 konvergieren.

Hinweis: Möglicherweise finden Sie es hilfreich, sich die Situation zunächst anhand einer einfachen Skizze zu veranschaulichen.

Lösung. Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine beliebige Folge mit $a_n < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zu zeigen ist, dass $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *nicht* gegen 2 konvergiert, daß also

$$\exists\ \varepsilon > 0\ \forall\ n_0 \in \mathbb{N}\ \exists\ n \geq n_0 : |a_n - 2| > \varepsilon.$$

Wähle $\varepsilon = 1$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann bleibt zu zeigen

$$\exists\ n \geq n_0 : |a_n - 2| > 1.$$

Tatsächlich gilt die Betragsabschätzung sogar für alle $n \in \mathbb{N}$, denn ist $n \in \mathbb{N}$ beliebig, dann gilt $a_n - 2 < -2$, weil a_n nach Annahme negativ ist. Folglich gilt $|a_n - 2| > 2 > 1$, was zu zeigen war.

Aufgabe 3 Sei $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sin(x) + \cos(x)$. Berechnen Sie alle Maximal- und Minimalstellen von f.

Lösung. $f'(x) = \sin(x) + x\cos(x) - \sin(x) = x\cos(x) = 0 \iff x = 0 \vee x = \pi/2$.
Nach Satz der Vorlesung folgt, dass Maximal- und Minimalstellen allenfalls in $x = 0$ oder $x = \pi/2$ vorliegen können, oder am Rand des Definitionsbereiches ($x = \pi$).

$f''(x) = \cos(x) - x\sin(x) \Rightarrow f''(0) = 1 > 0, f''(\pi/2) = -\pi/2 < 0$. Nach Satz der Vorlesung folgt, dass $x = 0$ eine Minimal- und $x = \pi/2$ eine Maximalstelle ist.

Wegen $f'(\pi) = -\pi < 0$ liegt im Randpunkt $x = \pi$ eine Minimalstelle vor.

Aufgabe 4 Zur Erinnerung: Satz 17 aus der Vorlesung lautete wie folgt.

> Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig auf D, streng monoton und in $x_0 \in D$ differenzierbar und gilt $f'(x_0) \neq 0$, dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon f(D) \to \mathbb{R}$ differenzierbar im Punkt $y_0 = f(x_0)$ und es gilt $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Betrachten Sie die Funktion $f\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
Es ist bekannt, dass f bijektiv ist und dass für ihre Umkehrfunktion $\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ die Ableitungsformel $\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$ ($y \in \mathbb{R}$) gilt. Beweisen Sie diese Ableitungsformel, indem Sie den oben zitierten Satz auf die Funktion f anwenden. Begründen Sie kurz, warum der Satz überhaupt anwendbar ist, d.h. dass f alle genannten Voraussetzungen erfüllt.

Lösung. $D = (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ ist ein Intervall.

f ist stetig, weil sin und cos stetig sind.

f ist streng monoton auf D, weil $f'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)^2+\sin(x)^2}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2$ positiv ist.

Sei $x_0 \in D$. Dann ist $f'(x_0)$, wie gerade gesehen, positiv, also insbesondere ungleich Null.

Damit ist der Satz anwendbar.

Für $y_0 = \tan(x_0)$ besagt er $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{1+\tan(x_0)^2} = \frac{1}{1+y_0^2}$, wie gewünscht.

Aufgabe 5 Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x\log(y^2 + \sqrt{1+x^2})$.
Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y), \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right)$.

Lösung.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) &= \log(y^2 + \sqrt{1+x^2}) + \frac{x\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{y^2 + \sqrt{1+x^2}} \\
&= \log(y^2 + \sqrt{1+x^2}) + \frac{x^2}{1 + x^2 + y^2\sqrt{1+x^2}} \\
\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) &= \frac{2xy}{y^2 + \sqrt{1+x^2}},
\end{aligned}$$

also

$$\nabla f(x,y) = \left(\log(y^2 + \sqrt{1+x^2}) + \frac{x^2}{1 + x^2 + y^2\sqrt{1+x^2}}, \frac{2xy}{y^2 + \sqrt{1+x^2}}\right).$$

Aufgabe 6 Sei $D = [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$. Außerdem sei $\gamma\colon [0, \frac{1}{2}\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\sin(t), \cos(t))$.

a) Berechnen Sie das Volumenintegral $\int_D f(x,y)d(x,y)$.

b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma f(x,y)\,ds$.

Lösung.

a) Mit dem entsprechenden Satz der Vorlesung (Voraussetzungen sind erfüllt) bekommt man $\int_D f(x,y)d(x,y) = \int_0^1 \int_0^1 (x^2+y^2)dxdy = \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3 + y^2x\right]_0^1 dy = \int_0^1 (\frac{1}{3} + y^2)dy = \left[\frac{1}{3}y + \frac{1}{3}y^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}$.

b) Mit dem entsprechenden Satz der Vorlesung (Voraussetzungen sind erfüllt) bekommt man $\gamma'(t) = (\cos(t), -\sin(t)) \Rightarrow ||\gamma'(t)|| = \sqrt{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} = 1$.
$\Rightarrow \int_\gamma f(x,y)ds = \int_0^{\pi/2} f(\gamma(t))||\gamma'(t)||dt = \int_0^{\pi/2} (\sin(t)^2 + \cos(t)^2) \cdot 1dt = \int_0^{\pi/2} 1\,dt = \frac{\pi}{2}$.